УДК 004.891.3

НЕЧЕТКИЕ РЕЛЯЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ НА ОСНОВЕ ИМПЛИКАТОРА ЛУКАСЕВИЧА

Осипов Геннадий Сергеевич, д.т.н., заведующий кафедрой

Аннотация. Предложены методологические и теоретические основы решения нечетких реляционных уравнений. Выполнена практическая апробация методики с использованием импликатора Лукасевича в среде пакета символьной математики.

Ключевые слова: нечеткие реляционные уравнения, нечеткая импликация.

Все научные исследования, связанные с анализом функционирования сложных социально-экономических, биоэкологических и техногенных систем, по сути, ориентированы на решение двух основных проблем:

- решение прямой задачи (прогнозирования), когда по текущему состоянию системы при известном операторе функционирования определяются ее координаты в исследуемом фазовом пространстве на перспективу;
- решение обратной задачи (диагностики) – определяются предпосылки, которые привели систему в текущее наблюдаемое состояние.

По определению прямая задачи принципиально не является сложной. Обратная задача, наоборот, обладает высокой трудоемкостью решения и неоднозначна. Ситуация осложняется еще и тем, что используемая в анализе информация является, как правило, неточной, неполной, т.е. решение приходится принимать в нечетких условиях.

Отметим также, что методы решения обратной задачи позволяют определять решения, которые приведут систему в требуемое целевое состояние. Поэтому настоящее исследование ориентировано на синтез теоретических и методологических основ решения нечетких реляционных уравнений с практической апробацией на базе импликации Лукасевича.

Пусть $(M_0 = M), M_1, M_2, ..., M_s, N$ – непустые конечные четкие множества.

Рассмотрим нечеткое реляционное уравнением вида:

$$\tilde{\mathbf{A}} \circ \tilde{X} = \tilde{Y}, \qquad (1)$$

где «$\circ$» – символ композиции;

$\tilde{\mathbf{A}} = \overset{s}{\underset{i=1}{\circ}} \tilde{A}_i (M_{i-1}, M_i)$ – последовательность композиций нечетких соответствий

$$\tilde{A}_i = \iint\limits_{M_{i-1} \times M_i} \frac{\mu_{\tilde{A}_i}(m_{i-1}, m_i)}{(m_{i-1}, m_i)} \left(\forall m_{(.)} \in M_{(.)}\right),$$

заданных на $M_{i-1} \times M_{i+1}$ функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{A}_i \circ \tilde{A}_{i+1}}(m_{i-1}, m_{i+1}) = \left[\frac{\sup T}{\inf I}\right]_{m_i \in M_i} \left(\mu_{\tilde{A}_i}(m_{i-1}, m_i), \mu_{\tilde{A}_{i+1}}(m_i, m_{i+1})\right) \left(\forall m_{(.)} \in M_{(.)}\right); \qquad (2)$$

$\tilde{X} = \tilde{X}(M_s, N) = \iint\limits_{M_s \times N} \frac{\mu_{\tilde{X}}(m_s, n)}{(m_s, n)} (\forall m_s \in M_s; \forall n \in N)$ – входное соответствие (предпосылки);

$\tilde{Y} = \tilde{Y}(M, N) = \iint\limits_{M \times N} \frac{\mu_{\tilde{Y}}(m, n)}{(m, n)} (\forall m \in M; \forall n \in N)$ – выходное (замыкающее) соответствие с областью отправления M и областью прибытия N (заключения).

Очевидно решение прямой задачи тривиально и может быть получено по формулам (2).

Целью исследования является решение обратной задачи -- нахождение представления входного нечеткого соответствия $\tilde{X}(M_s, N)$ при известном представлении выходного нечеткого соответствия $\tilde{Y}(M, N)$.

Рассмотрим часто используемую в практических приложениях t-норму $T = W(x, y) = \max(x + y - 1, 0)$ – граничное произведение.

Индуцируем соответствующий этой норме импликатор по схеме:

$$I = N\big(T(x, N(y))\big),$$

где $N(a) = 1 - a$ – стандартный инвертор.

Тогда получим: $I_w = \min(1 - x + y, 1)$ – этот импликатор называется импликатором Лукасевича [1].

Трудоемкость решения обратной задачи, как правило, высока, более того, множество решений может быть пусто. В этом случае формулируется следующая экстремальная (оптимизационная) задача [2]:

$$\begin{gathered} (D, f): f = \|\mathbf{A} \circ X - Y^0\| \to \min \\ D = \{x \in X : \forall x \in [0,1]\} \end{gathered} \qquad (3)$$

где $Y^0(M, N)$ – наблюдаемое соответствие.

Решение задачи (3) позволяет найти искомое нечеткое соответствие, которое в наивысшей степени отвечает условию минимизации критерия оптимизации – нормы отклонения расчетных величин от наблюдаемых.

Рассмотрим простейшую двухкаскадную систему вида (1) в матричной форме:

$$\underbrace{A \circ B}_{\mathbf{A}} \circ X = Y. \qquad (4)$$

Пусть: $A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.7 & 0.4 \\ 0.8 & 0.5 & 0.6 \end{pmatrix}$;

$B = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.7 & 1.0 & 0.8 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 & 0.9 \\ 0.7 & 0.9 & 0.6 & 0.5 \end{pmatrix}$ – заданные нечеткие соответствия, составляющие композицию;

$Y^0 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 \\ 0.8 & 0.6 \end{pmatrix}$ – наблюдаемое соответствие;

$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \\ x_{41} & x_{42} \end{pmatrix}$ – искомое соответствие.

Очевидно, модель (4) в данном случае может быть записана в виде

$$\min\left(\min_{k=\overline{1,4}}\left(1-\min\left(\min_{l=\overline{1,3}}\left(1-a_{il}+b_{lk},1\right)\right)+x_{kj},1\right)\right)=y_{ij}^{0};\left(j=\overline{1,2}\left(i=\overline{1,2}\right)\right).$$

Расчеты выполнялись в среде пакета символьной математики *Wolfram Mathematica* [3].

$$\left\{\begin{array}{c|c|c}
0.7\le x_{11}\le 1 & 0.7\le x_{21}\le 1 & \left[\begin{array}{c|c} x_{31}=0.8 & 0.7\le x_{41}\le 1 \\ \hline 0.8<x_{31}\le 1 & x_{41}=0.7 \end{array}\right. \\ \hline
0.5\le x_{12}\le 1 & 0.5\le x_{22}\le 1 & \left[\begin{array}{c|c} x_{32}=0.6 & 0.5\le x_{42}\le 1 \\ \hline 0.6<x_{32}\le 1 & x_{42}=0.5 \end{array}\right.
\end{array}\right..$$

Продолжительность решения обратной задачи составляет 10 секунд.

В данном случае оптимизационная модель (3) сводится к двум экстремальным задачам:

$$\begin{gathered}\left\|y_{11}\left(x_{11},x_{21},x_{31},x_{41}\right)-y_{11}^{0}\right\|+\left\|y_{21}\left(x_{11},x_{21},x_{31},x_{41}\right)-y_{21}^{0}\right\|\to\min\\ \left\|y_{12}\left(x_{12},x_{22},x_{32},x_{42}\right)-y_{12}^{0}\right\|+\left\|y_{22}\left(x_{12},x_{22},x_{32},x_{42}\right)-y_{22}^{0}\right\|\to\min.\\ \forall x\in\left[0,1\right]\end{gathered}\qquad(5)$$

Решение задач (5) различными методами представлены в таблице (время нахождения решения записано в секундах).

Таблица. Результаты решения оптимизационных задач

Метод	Время	x_{11} / x_{12}	x_{21} / x_{22}	x_{31} / x_{32}	x_{41} / x_{42}
Нелдера-Мида	0.47	0.88	0.95	0.81	0.70
	0.90	0.81	0.72	0.60	0.85
Дифференциальной эволюции	2.03	0.76	0.80	0.80	0.80
	1.57	0.90	0.71	0.78	0.50
Случайного поиска	1.05	0.72	0.60	0.98	0.70
	1.04	0.61	0.50	0.91	0.50
Имитации отжига	0.46	0.88	0.95	0.81	0.70
	0.82	0.81	0.72	0.60	0.85

Разработанные методологические основы решения нечетких реляционных уравнений являются унифицированными и могут быть реализованы при анализе функционирования, диагностики и управления в нечетких условиях сложными системами в различных предметных и проблемных областях.

Список литературы

1. Блюмин С. Л., Шуйкова И. А., Сараев П. В., Черпаков И. В. Нечеткая логика: алгебраические основы и приложения. Липецк: ЛЭГИ. 2002. 111с.

2. Osipov G.S. The problem of fuzzy diagnostics as an optimization problem. European Journal of Technical and Natural Sciences, Premier Publishing s.r.o. Vienna. 4. 2018, Pp. 29-32. DOI: 10.29013/EJTNS-18-4-29-31

3. Осипов Г. С., Вашакидзе Н. С., Филиппова Г. В. О решении обратных задач для нечетких соответствий в среде *Wolfram Mathematica* // Постулат. 2018. № 1 (27). С. 42. DOI: 10.18411/Postulat-2018-1. idSP: http://sp-identifier.ru/000001postulat-2018-1