Доказательства теоремы Пифагора

Василова Дина Ильнаровна

Елабужский институт Казанского Федерального Университета

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, профессор РАЕ, доцент кафедры математики и прикладной информатики ЕИ КФУ

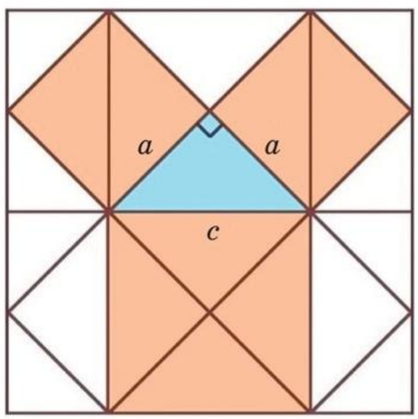
Миронова Юлия Николаевна

Аннотация. *Одним из самых выдающихся достижений античной математики является теорема Пифагора. Она лежит в основе большей части евклидовой геометрии и всей тригонометрии, ньютоновой физики и релятивистской динамики. Уже несколько тысячелетий к этой теореме приковано пристальное внимание профессионалов и любителей. В статье представлены четыре новых доказательства теоремы Пифагора, первые два из которых получены из подобия треугольников, и два последние - подобия треугольников и вычисление площади треугольников.*

Ключевые слова: *Теорема Пифагора, новые доказательства теоремы Пифагора, подобие треугольников.*

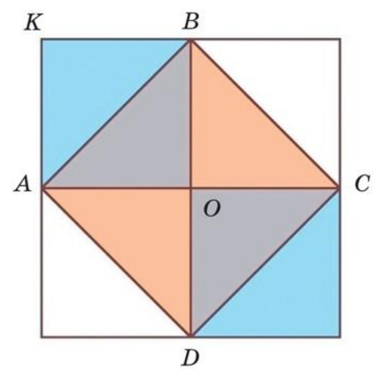
Введение

Теорема Пифагора едва ли не самая узнаваемая и, несомненно, самая знаменитая в истории математики. Несмотря на простоту формулировки, эта теорема отнюдь не очевидна: глядя на прямоугольный треугольник со сторонами $a < b < c$, усмотреть соотношение $a^2 + b^2 = c^2$ невозможно. Однажды известный американский логик и популяризатор науки Рэймонд Смаллиан, желая подвести учеников к открытию теоремы Пифагора, начертил на доске прямоугольный треугольник и по квадрату на каждой его стороне и сказал: «Представьте, что эти квадраты сделаны из кованого золота и вам предлагают взять себе либо один большой квадрат, либо два маленьких. Что вы выберете?» Мнения разделились пополам, возникла оживлённая дискуссия. Каково же было удивление учеников, когда учитель объяснил им, что никакой разницы нет! Но стоит только потребовать, чтобы катеты были равны, — и утверждение теоремы станет явным (рис. 1). И кто после этого усомнится, что «пифагоровы штаны» во все стороны равны? А вот те же самые «штаны», только в «сложенном» виде (рис. 2). Такой чертёж использовал герой одного из диалогов Платона под названием «Менон», знаменитый философ Сократ, разбирая с мальчиком-рабом задачу на построение квадрата, площадь которого в два раза больше площади данного квадрата. Его рассуждения, по сути, сводились к доказательству теоремы Пифагора, пусть и для конкретного треугольника.



$a^2 + a^2 = c^2$

1



$S_{ABCD} = 4S_{AOD} = 2S_{AOBK}$

$AD^2 = 2AO^2$

2

Фигуры, изображённые на рис. 1 и 2, напоминают простейший орнамент из квадратов и их равных частей — геометрический рисунок, известный с незапамятных времён. Им можно сплошь покрыть плоскость.

Доказательство Теоремы Пифагора.

Неизвестно, Пифагор сам обнаружил соотношение между длинами сторон в прямоугольном треугольнике или позаимствовал это знание. Античные авторы утверждали, что сам, и любили пересказывать легенду о том, как в честь своего открытия Пифагор принёс в жертву быка. Современные историки склонны считать, что он узнал о теореме, познакомившись с математикой вавилонян. Не знаем мы и о том, в каком виде Пифагор формулировал теорему: арифметически, как принято сегодня, — квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов, или геометрически, в духе древних, — квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, равновелик сумме квадратов, построенных на его катетах.

Считается, что именно Пифагор дал первое доказательство теоремы, носящей его имя. Оно, конечно, не сохранилось. По одной из версий, Пифагор мог воспользоваться разработанным в его школе учением о пропорциях. На нём основывалась, в частности, теория подобия, на которую опираются рассуждения. Проведём в прямоугольном треугольнике с катетами a и b высоту к гипотенузе c. Получим три подобных треугольника, включая исходный. Их соответствующие стороны пропорциональны, $\frac{a}{c} = \frac{m}{a}$ и $\frac{b}{c} = \frac{n}{b}$, откуда $a^2 = c \times m$ и $b^2 = c \times n$. Тогда $a^2 + b^2 = c \times (m + n) = c^2$ (рис. 4).

Это всего лишь реконструкция, предложенная одним из историков науки, но доказательство, согласитесь, совсем простое: занимает всего-то несколько строк, не нужно ничего достраивать, перекраивать, вычислять... Неудивительно, что его не раз переоткрывали. Оно содержится, например, в «Практике геометрии» Леонардо Пизанского (1220), и его до сих пор приводят в учебниках.

Такое доказательство не противоречило представлениям пифагорейцев о соизмеримости: изначально они считали, что отношение длин любых двух отрезков, а значит, и площадей прямолинейных фигур, можно выразить с помощью натуральных чисел. Никакие другие числа они не рассматривали, не допускали даже дробей, заменив их отношениями $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ и т. д. Однако, по иронии судьбы, именно теорема Пифагора привела пифагорейцев к открытию несоизмеримости диагонали квадрата и его стороны. Все попытки численно представить длину этой диагонали — у единичного квадрата она равна $\sqrt{2}$ — ни к чему не привели. Проще оказалось доказать, что задача неразрешима. На такой случай у математиков есть проверенный метод — доказательство от противного. Кстати, и его приписывают Пифагору.

Существование отношения, не выражаемого натуральными числами, положило конец многим представлениям пифагорейцев. Стало ясно, что известных им чисел недостаточно для решения даже несложных задач. Это открытие стало поворотным моментом в развитии греческой математики, её центральной проблемой. Сначала оно привело к разработке учения о несоизмеримых величинах — иррациональностях, а затем — и к расширению понятия числа. Иными словами, с него началась многовековая история исследования множества действительных чисел.

Первоначально теорема устанавливала соотношение между площадями квадратов, построенных на гипотенузе и катетах прямоугольного треугольника: квадрат, построенный на гипотенузе, равновелик сумме квадратов, построенных на катетах. Именно в такой формулировке доказывается эта теорема с помощью рисунков, приведенных на первой странице обложки. Здесь на верхнем левом рисунке выделен штриховыми линиями прямоугольный треугольник, на катетах и гипотенузе которого построены квадраты, на гипотенузе — наружу, на катетах — внутрь треугольника. Стороны этих квадратов продолжены везде, где один из квадратов налегает на другой. При этом образовалось несколько треугольников, трапеций и один голубой квадрат. Равные фигуры окрашены в одинаковый цвет. На тот факт, что треугольник, образованный из красной трапеции и желтого треугольника, равновелик (более того, симметричен) треугольнику, образованному из фиолетового треугольника и зеленой трапеции, обращает внимание фрагмент в правом верхнем углу.

В нижней части рисунка на катетах прямоугольного треугольника (белого) те же самые квадраты построены внешним образом. Попутно в одном из них фиолетово-зеленый треугольник заменен на равновеликий ему красно-желтый.

Теперь уже совсем нетрудно показать, что фигура, составленная из двух квадратов, построенных на катетах прямоугольного треугольника, равновелика квадрату, построенному на гипотенузе этого треугольника. Для этого заменяем еще раз зеленую трапецию вместе с фиолетовым треугольником на красную трапецию плюс желтый треугольник и замечаем, что образованная при этом фигура оказывается равносоставленной с квадратом, построенным на гипотенузе данного прямоугольного треугольника. Тем самым доказана и теорема Пифагора.

А вот еще одно доказательство, использующее равносоставленность. На рисунке 1 окрашенный в синий цвет отрезок равен одному из катетов, расположенного в нижней части чертежа прямоугольного треугольника, а красный треугольник — равнобедренный и прямоугольный. Доказав, что угол между двумя разрезами — слева и внизу — прямой, усматриваем, как из частей данной фигуры, представляющей собой объединение квадрата и равнобедренного прямоугольного треугольника, можно сложить либо два квадрата, либо один. Причем во втором случае сторона квадрата равняется гипотенузе того самого притаившегося треугольника. Шарнирное крепление на рисунке 2 показывает, что был отрезан прямоугольный треугольник, представляющий половину красного, и повернут относительна «шарнирной» точки на 135°. На рисунке 3 использованы разрезы рисунка 1. Вновь около шарнирных точек отделенные треугольники поворачиваются на 135° каждый.

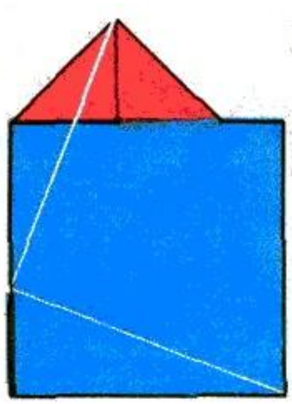


Рис. 1.

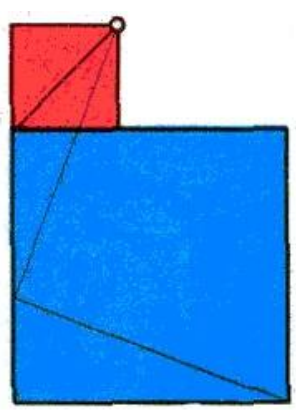


Рис. 2.

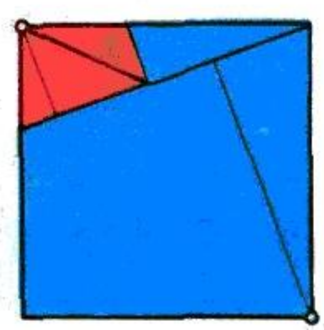


Рис. 3.

Современная геометрия предпочитает арифметическую формулировку теоремы Пифагора, а именно: если стороны прямоугольного треугольника измерены одним и тем же масштабом, то квадрат числа, выражающего гипотенузу, равен сумме квадратов чисел, выражающих катеты. Коротко: квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

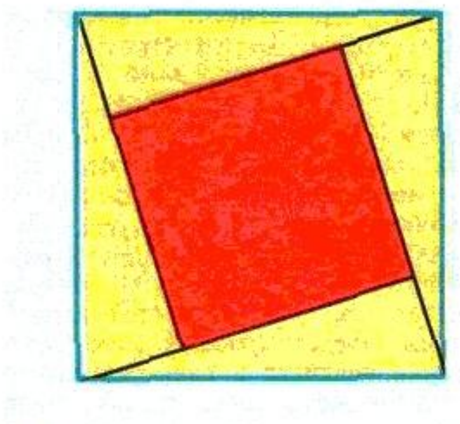


Рис. 4.

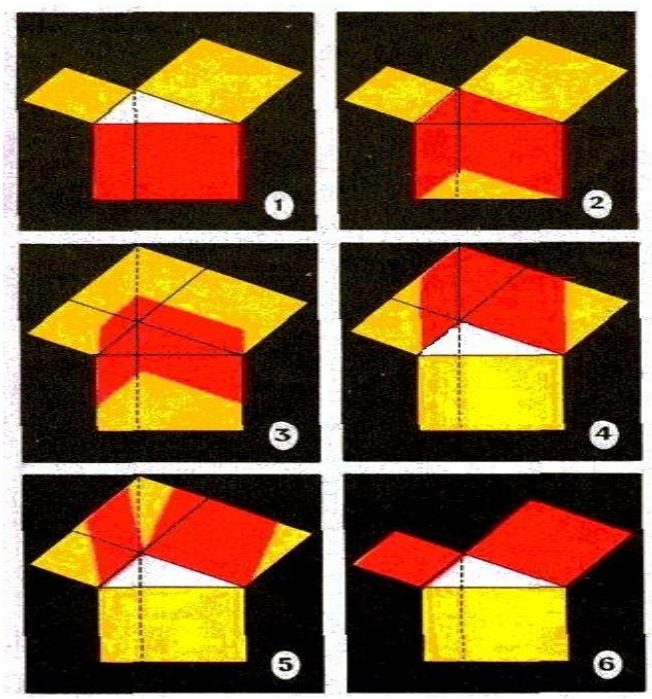
На рисунке 4 изображен квадрат с выделенными на нем четырьмя равными прямоугольными треугольниками. Именно из такого рисунка исходил в своем доказательстве в XII веке индийский математик Бхаскари-Ачарна.

Пусть сторона большого квадрата (она же — гипотенуза прямоугольного треугольника, окрашенного здесь в желтый цвет) равна с. Пусть также два его катета равны соответственно а и b. Тогда, в согласии с чертежом, $(a-b)2+\frac{4ab}{2}=c^2$, то есть $c^2=a^{\ 2}+b^2$. Следовательно, если треугольник прямоугольный, то сумма квадратов его катетов действительно равна квадрату гипотенузы.

Доказательство в картинках.

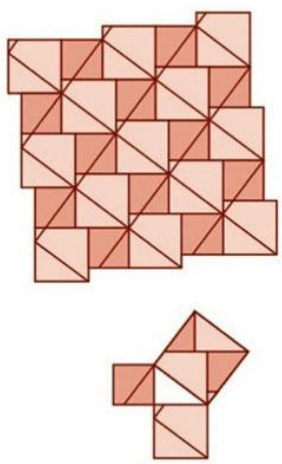
На рисунках запечатлены последовательные этапы доказательства теоремы Пифагора. Красной краски, затраченной на то, чтобы покрасить квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника (рис. 1), оказывается равно столько, сколько ее требуется, чтобы покрасить квадраты, построенные на катетах этого треугольника (рис. 6). На рисунке 2 квадрат превратился а равновеликую ему фигуру, по форме напоминающую развернутую книгу, движущуюся затем вверх.

Тот факт, что продолженная на рисунке 3 пунктиром высота прямоугольного треугольника попадает в точку пересечения продолжений сторон квадратов, построенных на катетах, требует обосновании — оно приведено на второй странице обложки. На следующих рисунках «книжка» распадается на параллелограммы, а они превращаются в равновеликие им квадраты, построенные на катетах данного прямоугольного треугольника. Тем самым сумма площадей квадратов, построенных на катетах произвольного прямоугольного треугольника, оказывается равной площади квадрата, построенного на его гипотенузе. Теорема Пифагора доказана.



Мозаика Пифагора.

Если покрыть плоскость квадратами двух разных размеров, окружив каждый малый квадрат четырьмя большими, получится паркет «мозаика Пифагора». Такой рисунок издавна украшает каменные полы, напоминая о древних доказательствах теоремы Пифагора (отсюда его название). По-разному накладывая на паркет квадратную сетку, можно получить разбиения квадратов, построенных на сторонах прямоугольного треугольника, которые предлагались разными математиками. Например, если расположить сетку так, чтобы все её узлы совпали с правыми верхними вершинами малых квадратов, проявятся фрагменты чертежа к доказательству средневекового персидского математика Ан-Найризи, которое он поместил в комментариях к «Началам» Евклида. Легко видеть, что сумма площадей большого и малого квадратов, исходных элементов паркета, равна площади одного квадрата наложенной на него сетки. А это означает, что указанное разбиение действительно пригодно для укладки паркета: соединяя в квадраты полученные многоугольники, как показано на рисунке, можно заполнить ими без пробелов и перекрытий всю плоскость.



Вывод

Теорема Пифагора - хороший пример для математического образования школьников и студентов, так как количество доказательств здесь не органично. Доказательства этой теоремы различными способами являются очень хорошими алгебро-геометрическими упражнениями. В школах и университетах могут объявляться конкурсы на наибольшее количество доказательств теоремы Пифагора. В этих конкурсах, возможно, будут найдены новые доказательства этой теоремы. Все это может вылиться в некое движение под названием «Пифагореана», что будет очень полезным в деле повышения престижа математического образования среди молодежи.

Использованная литература

1) Теорема Пифагора [Электронный ресурс] URL: http://www.problems.ru/articles/291.php

2) Теорема Пифагора. Четыре новых доказательства. [Электронный ресурс] URL: https://cyberleninka.ru/article/v/teorema-pifagora-ch..

3) 1. Loomis E.S. 1986. The Pythagorean proposition. Washington: The Nacional Council of Teachers of Mathematics : 310.

4) 3. Cui H.Y. To String together Six Theorems of Physics by Pythagoras Theorem // arXiv: physics / 0205021/V1/ [physics.gen –ph]