Операции над функциями и задачи прошлых веков, связанные с функциями

Гайсина Алия Ильнуровна

студентка факультета иностранных языков ЕИ КФУ

Научный руководитель: *Миронова Юлия Николаевна, кандидат физико-математических наук, профессор Российской Академии Естествознания, доцент кафедры математики и прикладной информатики ЕИ КФУ.*

Аннотация.*Описаны арифметические операции над функциями. Среди них сумма, разность, произведение и частное функций и другие разновидности операций. Указан класс элементарных функции и его подвиды. Дана полная информация на такие слова, как функция, композиция функции, обратная функция. Также приведены примеры функций из истории.*

Ключевые слова: *функция, арифметические операции, сложная функция, обратная функция.*

Введение

Функция – одно из основных математических и общенаучных понятий. Оно сыграли и поныне играет большую роль в познании реального мира. Само слово «функция» происходит от латинского «**function» – исполнение, осуществление.** В математике оно впервые употреблено лишь в XVII в. Г.В.Лейбницем, т. е сравнительно недавно, но сами функции и способы их задания фактические изучались людьми очень давно – можно сказать, почти так же давно, как числа и уравнения. Именно этим вопросам посвящена статья.

Основная часть

— Предположим, что у вас в кармане два яблока.
Некто взял у вас одно яблоко. Сколько у вас осталось яблок?
— Два.
— Подумайте хорошенько.
Буратино сморщился, — так здорово подумал.
— Два…

— Почему?
— Я же не отдам Некту яблоко, хоть он дерись!
(к/ф «Золотой ключик, или приключения Буратино»)

Всем нам хорошо известны основные арифметические операции: сложение, вычитание, умножение и деление. Сначала мы складывали и вычитали яблоки. Потом целые числа. Затем перешли к изучению операций над числами дробными. И вот наконец-то пришла очередь операций над функциями. Функции, как и обычные числа можно складывать и вычитать, умножать и делить.

Определение: *Суммой функций* $f(x)$*и* $g(x)$ *называется функция*$(f+g)(x)$*, которая для каждого x из множества X принимает значение*$f(x)+g(x)$.

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$,

$D(f+g)=D(f)\cap D(g)$,

Аналогично определяется произведение функций:

$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$,

$D(f\cdot g)=D(f)\cap D(g)$,

Разность функций:

$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$,

$D(f-g)=D(f)\cap D(g)$

Частное функций:

$(f/g)(x)=f(x)/g(x)$,

$D(fg)=D(f)\cap D(g)\backslash Mg, Mg=\{x\in D(g): g(x)=0\}$

С понятием функции связана определенная система общефункциональных понятий (числовая функция, области определения и значений, способы задания, график, возрастание и убывание, четность и нечетность, нули (корни) функции, монотонность, периодичность, обратная и сложная функции, непрерывность или разрывность и др.).

Важное место в функциональной линии уделяется глубокому изучению класса функций, получивших название элементарных (не значит простых). К этим функциям, которые уже к XVII в. были хорошо изучены, которые относят многочлены, рациональные и иррациональные функции, показательную, логарифмическую и тригонометрические функции.

Основные элементарные функции могут соединяться между собой и с помощью операции взятия функции от функции. В таком случае мы придём к понятию сложной функции или композиции функций. Пусть даны две функции $y = f(z) u z = g(x)$, тогда функцию $y = f\big(g(x)\big)$ называют **композицией двух данных функций или сложной функций,** составленной из них. Функция $z = g(x)$ называется промежуточным аргументом, x – основным аргументом.

Композиция функций – результат последовательного применения этих функций в определенном порядке. Для записи композиций функций часто употребляется значок «о» и пишут $h = f°g$ т.е. функция $\boldsymbol{h}$ получена как композиция функций fи g (сначала применяется g, а затем f). Если $\boldsymbol{z}$ есть функция от $\boldsymbol{x}$, а **у** есть функция от **z**, то **у** можно рассматривать как сложную функцию от **х**. Например, функцию $\sqrt{1 - x^2}$ можно рассматривать как композицию функций $z = 1 - x^2$ и $y = \sqrt{z}$.

Такое задание сложной функции называют ещё цепным заданием. При этом цепь функций может состоять из любого их числа. Из функций $z = x^2 + 2$ и $y = \sqrt{1 - z^2}$ образовать сложную функцию нельзя, т. е y=$\sqrt{1 - (x^2 + 2)^2}$ в области действительных чисел не существует, т. к никакому числу $\boldsymbol{x}$ не соответствует число $\boldsymbol{y}$**.** Поэтому при рассмотрении сложных функций следует иметь в виду области определения составляющих функций.

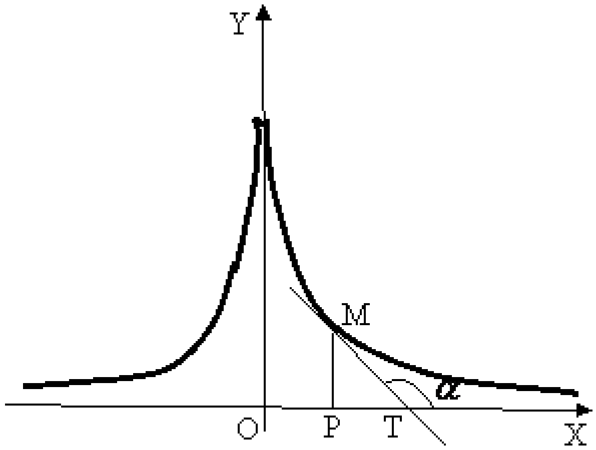
С понятием функции тесно связано понятие обратной функции и умение выяснять, имеет ли данная функция обратную, и если имеет, то как её найти. Слово «обратный» часто используется в математике: обратное число, обратная дробь, обратное действие, обратная теорема, взаимное обратные числа(теоремы) и др.

В учебнике М.И. Башмакова дается такое определение: «Обратной функцией для функции $\boldsymbol{f}$ называется такая функция $\boldsymbol{g}$, которая каждому числу $\boldsymbol{y}$ (из области значений функции $\boldsymbol{f}$) ставит в соответствие такое число $\boldsymbol{x}$, для которого $f(x) = y$». Если функция $y = f(x)$ имеет обратную, то *f(x)* называют обратимой, а функции $y = f(x)$ *и* $x = f^{-1}(y)$ - взаимно обратными. Например, пары функций $y = kx$ и $y = \frac{1}{k} \cdot y(k \neq 0), y = x^3$ и $x = \sqrt[3]{y}$ взаимно обратные.

Задачи прошедших веков, связанные с функциями.

1. <u>Задача Лейбница о трактрисе</u>

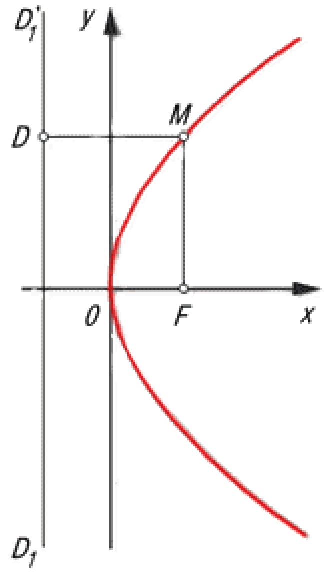
Пусть по оси абсцисс бежит собака, а ее хозяин (первоначально находившийся на оси ординат) бежит за ней так, что поводок все время натянут. В этом случае поводок будет направлен по касательной к пути хозяина. Требуется найти, по какой линии бежит хозяин собаки.



<u>Решение:</u> Эту кривую называют трактрисой. Через полтора столетия после ее открытия она сыграла роль в утверждении неевклидовой геометрии Лобачевского: если повернуть трактрису вокруг оси абсцисс, то на полученной поверхности вращения будет выполняться геометрия Лобачевского.

2. <u>Оптические свойства параболических зеркал.</u>

По дошедшей до нас легенде Архимед построил вогнутые зеркала и с их помощью сжег римские корабли. Большинство ученых отвергают эту легенду, поскольку такие зеркала должны были бы иметь слишком большие размеры, а это невозможно при тогдашнем уровне техники.



Но если даже история о сожжении кораблей легендарна, то все-таки сжечь римский флот при помощи параболических зеркал возможно.

Результаты, полученные Архимедом, были основаны на следующем утверждении: любая прямая, параллельная оси симметрии параболы, после отражения от параболы проходит через ее фокус. Это же свойство параболы можно сформулировать и так: касательная к любой точке параболы делит пополам угол между прямой, соединяющей точку касания с фокусом, и перпендикуляром, опущенным из этой точки на директрису.

Для того чтобы построить зеркало, собирающее солнечные лучи в одной точке, нужно отшлифовать его по параболоиду вращения – поверхности, получаемой при вращении параболы вокруг ее оси. Если направить такое параболическое зеркало на Солнце, то все отраженные лучи пройдут через фокус параболы, и температура в нем окажется настолько большой, что с помощью солнечных лучей можно будет вскипятить воду, расплавить свинец и т.д. Отсюда происходит и само название «фокус», означающее по латыни «очаг».

Заключение

Таким образом, функции были известны человеку еще в древние времена, они получили распространение для решения прикладных задач, понятие функции постоянно используется и совершенствуется.

Список литературы

1. Методика обучения математике: функциональная содержательно-методическая линия : учеб.-метод. пособие / В. П. Покровский;

Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2014. – 143 с.

2. Исторические сюжеты функциях [Электронный ресурс] URL: http://uztest.ru/abstracts/?idabstract=531211
3. Башмаков М.И.Математика. 3-е изд. - М.: 2017.— 256 с
4. Операции над функциями: [Электронный ресурс] URL: http://df-dt.com/operacii-nad-funkciyami.html