Теорема Пифагора и некоторые способы ее доказательства

Каримова Румия Фаилевна

студентка факультета иностранных языков

Елабужского института КФУ

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук

Миронова Юлия Николаевна

Аннотация: В статье описаны разные способы доказательства теоремы Пифагора, опирающиеся на геометрические построения.

Теорема Пифагора — одна из основополагающих теорем евклидовой геометрии, устанавливающая соотношение между сторонами прямоугольного треугольника: сумма квадратов длин катетов равна квадрату длины гипотенузы.

Строго говоря, хоть теорема и называется «теоремой Пифагора», сам Пифагор ее не открывал. Прямоугольный треугольник и его особенные свойства изучались задолго до него. Есть две полярных точки зрения на этот вопрос. По одной версии Пифагор первым нашел полноценное доказательство теоремы. По другой доказательство не принадлежит авторству Пифагора.

Известно, что доказательства Пифагора, если оно когда-либо существовало, не сохранилось. Впрочем, высказываются предположения, что знаменитое доказательство из «Начал» Евклида может принадлежать как раз Пифагору, и Евклид его только зафиксировал.

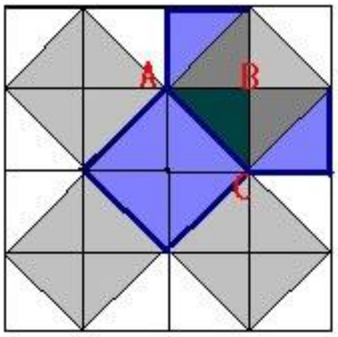
Доказательства теоремы Пифагора

В школьных учебниках в основном приводят алгебраические доказательства. Но суть теоремы в геометрии, так что рассмотрим в первую очередь те доказательства знаменитой теоремы, которые опираются на эту науку.

Доказательство 1

Для самого простого доказательства теоремы Пифагора для прямоугольного треугольника нужно задать идеальные условия: пусть треугольник будет не только прямоугольным, но и равнобедренным. Есть основания полагать, что именно такой треугольник первоначально рассматривали математики древности.

Утверждение *«квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, равновелик сумме квадратов, построенных на его катетах»* можно проиллюстрировать следующим чертежом:



Посмотрите на равнобедренный прямоугольный треугольник ABC: На гипотенузе AC можно построить квадрат, состоящий из четырех треугольников, равных исходному ABC. А на катетах AB и BC построено по квадрату, каждый из которых содержит по два аналогичных треугольника.

Кстати, этот чертеж лег в основу многочисленных анекдотов и карикатур, посвященных теореме Пифагора. Самый знаменитый, пожалуй, это *«Пифагоровы штаны во все стороны равны»*.

Доказательство 2

Этот метод сочетает в себе алгебру и геометрию и может рассматриваться как вариант древнеиндийского доказательства математика Бхаскари.

Постройте прямоугольный треугольник со сторонами **a, b и c** (рис.1). Затем постройте два квадрата со сторонами, равными сумме длин двух катетов, – **(a+b)**. В каждом из квадратов выполните построения, как на рисунках 2 и 3.

В первом квадрате постройте четыре таких же треугольника, как на рисунке 1. В результате получится два квадрата: один со стороной а, второй со стороной **b**.

Во втором квадрате четыре построенных аналогичных треугольника образуют квадрат со стороной, равной гипотенузе **c**.

Сумма площадей построенных квадратов на рис.2 равна площади построенного нами квадрата со стороной с на рис.3. Это легко проверить, высчитав площади квадратов на рис. 2 по формуле. А площадь вписанного квадрата на рисунке 3. путем вычитания площадей четырех равных между собой вписанных в квадрат прямоугольных треугольников из площади большого квадрата со стороной **(a+b)**.

Записав все это, имеем: $\mathbf{a^2+b^2=(a+b)^2-2ab}$. Раскройте скобки, проведите все необходимые алгебраические вычисления и получите, что $\mathbf{a^2+b^2= a^2+b^2}$. При этом площадь вписанного на рис.3. квадрата можно вычислить и по традиционной формуле $\mathbf{S=c^2}$. Т.е. $\mathbf{a^2+b^2=c^2}$ – вы доказали теорему Пифагора.

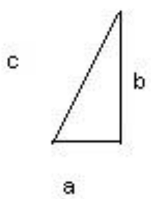


рис.1

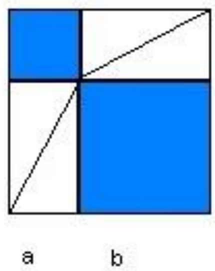


рис.2

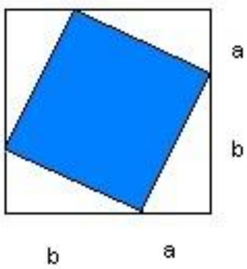
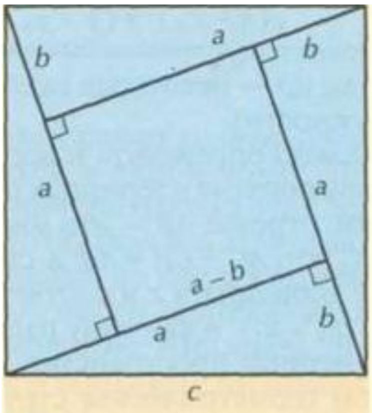


рис.3

Доказательство 3

Само же древнеиндийское доказательство описано в XII веке в трактате «Венец знания» («Сиддханташиромани») и в качестве главного аргумента автор использует призыв, обращенный к математическим талантам и наблюдательности учеников и последователей: «Смотри!».



Внутри квадрата постройте четыре прямоугольных треугольника так, как это обозначено на чертеже. Сторону большого квадрата, она же гипотенуза, обозначим **c**. Катеты треугольника назовем **a** и **b**. В соответствии с чертежом сторона внутреннего квадрата это **(a-b)**.

Используйте формулу площади квадрата **$S=c^2$**, чтобы вычислить площадь внешнего квадрата. И одновременно высчитайте ту же величину, сложив площадь внутреннего квадрата и площади всех четырех прямоугольных треугольников: **$(a-b)^2$2+4*1\2*a*b**.

Вы можете использовать оба варианта вычисления площади квадрата, чтобы убедиться: они дадут одинаковый результат. И это дает вам право записать, что **$c^2=(a-b)^2+4*1\backslash 2*a*b$**. В результате решения вы получите формулу теоремы Пифагора **$c^2=a^2+b^2$**. Теорема доказана.

Доказательство 4

Это любопытное древнекитайское доказательство получило название «Стул невесты» - из-за похожей на стул фигуры, которая получается в результате всех построений:

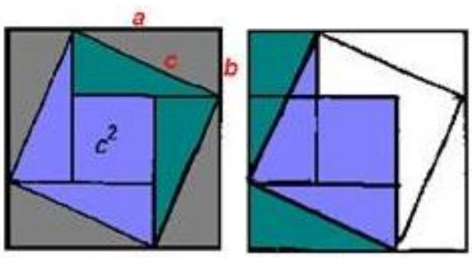


Рис.1.Рис. 2.

В нем используется чертеж, который мы уже видели на рис.3 во втором доказательстве. А внутренний квадрат со стороной с построен так же, как в древнеиндийском доказательстве, приведенном выше.

Если мысленно отрезать от чертежа на рис.1 два зеленых прямоугольных треугольника, перенести их к противоположным сторонам квадрата со стороной с и гипотенузами приложить к гипотенузам сиреневых треугольников, получится фигура под названием «стул невесты» (рис.2). Для наглядности можно то же самое проделать с бумажными квадратами и треугольниками. Вы убедитесь, что «стул невесты» образуют два квадрата: маленькие со стороной **b** и большой со стороной **a**.

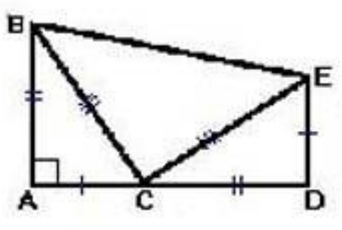
Эти построения позволили древнекитайским математикам и нам вслед за ними прийти к выводу, что $\mathbf{c^2=a^2+b^2}$.

Доказательство 5

Это еще один способ найти решение для теоремы Пифагора, опираясь на геометрию. Называется он «Метод Гарфилда».

Постройте прямоугольный треугольник **ABC**. Нам надо доказать, что $\mathbf{BC^2=AC^2+AB^2}$.

Для этого продолжите катет **AC** и постройте отрезок **CD**, который равен катету **AB**. Опустите перпендикулярный **AD** отрезок **ED**. Отрезки **ED** и **AC** равны. Соедините точки **E** и **B**, а также **E** и **C** и получите чертеж, как на рисунке ниже:



Чтобы доказать терему, мы вновь прибегаем к уже опробованному нами способу: найдем площадь получившейся фигуры двумя способами и приравняем выражения друг к другу.

Найти площадь многоугольника **ABED** можно, сложив площади трех треугольников, которые ее образуют. Причем один из них, **ECB**, является не только прямоугольным, но и равнобедренным. Не забываем также, что **AB=CD**, **AC=ED** и **BC=CE** – это позволит нам упростить запись и не перегружать ее. Итак, $\mathbf{S_{ABED}=2*1/2(AB*AC)+1/2BC^2}$.

При этом очевидно, что **ABED** – это трапеция. Поэтому вычисляем ее площадь по формуле: $\mathbf{S_{ABED}=(DE+AB)*1/2AD}$. Для наших вычислений удобней и нагляднее представить отрезок **AD** как сумму отрезков **AC** и **CD**.

Запишем оба способа вычислить площадь фигуры, поставив между ними знак равенства: $\mathbf{AB*AC+1/2BC^2=(DE+AB)*1/2(AC+CD)}$. Используем уже известное нам и описанное выше равенство отрезков, чтобы упростить правую часть записи: $\mathbf{AB*AC+1/2BC^2=1/2(AB+AC)^2}$. А теперь раскроем скобки и преобразуем равенство: $\mathbf{AB*AC+1/2BC^2=1/2AC^2+2*1/2(AB*AC)+1/2AB^2}$. Закончив все преобразования, получим именно то, что нам и надо: $\mathbf{BC^2=AC^2+AB^2}$. Мы доказали теорему.

Конечно, этот список доказательств далеко не полный. Теорему Пифагора также можно доказать с помощью векторов, комплексных чисел, дифференциальный уравнений, стереометрии и т.п. И даже физики: если, например, в аналогичные представленным на чертежах квадратные и треугольные объемы залить жидкость. Переливая жидкость, можно доказать равенство площадей и саму теорему в итоге.

Вывод

Стоит подчеркнуть, что теорема Пифагора очень важна в геометрии. Она является основой решения множества геометрических задач, базой для изучения теоретического и практического курса геометрии в дальнейшем. К сожалению, невозможно здесь привести все или даже самые красивые доказательства теоремы, однако хочется надеется, что приведенные примеры убедительно свидетельствуют об огромном интересе сегодня, да и вчера, проявляемом по отношению к ней.

Список литературы:

1. Теорема Пифагора: история вопроса, доказательства, примеры практического применения [Электронный ресурс] URL: https://blog.tutoronline.ru/teorema-pifagora
2. Теорема Пифагора [Электронный ресурс] URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Теорема_Пифагора
3. В.Я.Березин Журнал «Квант». Теорема Пифагора 1993г. №5