Теорема Пуанкаре

Чибинова Назлыгуль Ниязовна

студентка факультета иностранных языков Елабужского Института Казанского (Привожского) федерального университета.

Научный руководитель: *Миронова Юлия Николаевна, кандидат физико-математических наук, профессор Российской Академии Естествознания, доцент кафедры математики и прикладной информатики ЕИ КФУ.*

Введение

В последние годы в области математики произошли впечатляющие достижения, одной из которых является доказательство математической гипотезы Пуанкаре.

Сформулированная в 1904 году математиком Анри Пуанкаре гипотеза была доказана в серии статей 2002—2003 годов Григорием Перельманом, российским математиком. После подтверждения доказательства математическим сообществом в 2006 году, гипотеза Пуанкаре стала первой и единственной на данный момент решённой задачей тысячелетия.

О роли Пуанкаре в математике трудно сказать лучше, чем это сделано в энциклопедии: «Труды Пуанкаре в области математики, с одной стороны, завершают классическое направление, а с другой - открывают пути к развитию новой математики, где наряду с количественными соотношениями устанавливаются факты, имеющие качественный характер» (БСЭ, изд. 3-е, т. 2).

Гипотеза Пуанкаре имеет качественный характер - как и вся та область математики (а именно топология), к которой она относится и в создании которой Пуанкаре принял решающее участие. На современном языке гипотеза Пуанкаре звучит так: *всякое односвязное компактное трёхмерное многообразие без края гомеоморфно трёхмерной сфере*.

В следующих абзацах частично и очень приблизительно разъясняется смысл этой словесной формулы.

Основная часть

Обычная сфера, которая есть поверхность обычного шара, двумерна (а сам шар - тот трёхмерен). Двумерная сфера состоит из всех точек трёхмерного пространства, равноудалённых от некоторой выделенной точки, называемой центром и сфере не принадлежащей. Трёхмерная сфера состоит из всех точек четырёхмерного пространства, равноудалённых от своего центра (сфере не принадлежащего). В отличие от двумерных сфер трёхмерные сферы недоступны нашему непосредственному наблюдению, и нам представить себе их очень трудно. Не исключено, однако, что все мы как раз в трёхмерной сфере и находимся, то есть что наша Вселенная является трёхмерной сферой. В этом состоит значение результата Перельмана для физики и астрономии. Термин «односвязное компактное трёхмерное многообразие без края» содержит указания на предполагаемые свойства нашей Вселенной. Термин «гомеоморфно» означает некую высокую степень сходства, в известном смысле неотличимость. Формулировка в целом означает, следовательно, что если наша Вселенная обладает всеми свойствами односвязного компактного трёхмерного многообразия без края, то она - в том же самом «известном смысле» - и есть трёхмерная сфера.

Понятие односвязности - довольно простое понятие. Представим себе канцелярскую резинку (то есть резиновую нить со склеенными концами) столь упругую, что она, если её не удерживать, стянется в точку. От нашей резинки мы потребуем ещё, чтобы при стягивании в точку она не выходила за пределы той поверхности, на которой мы её расположили. Если мы растянем такую резинку на плоскости и отпустим, она немедленно стянется в точку. То же произойдёт, если мы расположим резинку на поверхности глобуса, то есть на сфере. Для поверхности спасательного круга ситуация окажется совершенно иной: некто легко найдёт такие расположения резинки на этой поверхности, при которой стянуть резинку в точку, не выходя за пределы рассматриваемой поверхности, невозможно.

Геометрическая фигура называется односвязной, если любой замкнутый контур, расположенный в пределах этой фигуры, можно стянуть в точку, не выходя за названные пределы. Мы только что убедились, что плоскость и сфера односвязны, а поверхность спасательного круга не односвязна. Не односвязна и плоскость с вырезанной в ней дырой. Понятие односвязности применимо и к трёхмерным фигурам. Так, куб и шар односвязны: всякий находящийся в их толще замкнутый контур можно стянуть в точку, причём в процессе стягивания контур будет всё время оставаться в этой толще. А вот баранка не односвязна: в ней можно найти такой контур, который нельзя стянуть в точку так, чтобы в процессе стягивания контур всё время находился в тесте баранки. Не односвязен и крендель. Можно доказать, что трёхмерная сфера односвязна. Отрезок имеет два конца, он состоит из этих концов и всех точек, расположенных между ними. Интервал же состоит только из всех точек, расположенных между его концами, сами же концы в состав интервала не входят: можно сказать, что интервал - это отрезок с удалёнными из него концами, а отрезок - это интервал с добавленными к нему концами. Интервал и отрезок являются простейшими примерами одномерных многообразий, причём интервал есть многообразие без края, а отрезок - многообразие с краем; край в случае отрезка состоит из двух концов. Главное свойство многообразий, лежащее в основе их определения, состоит в том, что в многообразии окрестности всех точек, за исключением точек края (которого может и не быть), устроены совершенно одинаково. При этом окрестностью какой-либо точки А называется совокупность всех точек, расположенных вблизи от этой точки А. Микроскопическое существо, живущее в многообразии без края и способное видеть только ближайшие к себе точки этого многообразия, не в состоянии определить, в какой именно точке оно, существо, находится: вокруг себя оно всегда видит одно и то же.

Примером одномерной фигуры, не являющейся многообразием, может служить линия в форме буквы Т: здесь есть особая точка, окрестность которой не похожа на окрестности других точек - это точка, где сходятся три отрезка. Другой пример одномерного многообразия - линия в форме восьмёрки; в особой точке здесь сходятся четыре линии. Плоскость, сфера, поверхность спасательного круга служат примерами двумерных многообразии без края. Плоскость с вырезанной в ней дырой также будет многообразием - а вот с краем или без края, зависит от того, куда мы относим контур дыры. Если мы относим его к дыре, получаем многообразие без края; если оставляем контур на плоскости, получаем многообразие с краем, каковым и будет служить этот контур. Здесь имеется в виду идеальное математическое вырезание, а при реальном физическом вырезании ножницами вопрос, куда относится контур, не имеет никакого смысла.

Трёхмерные многообразия

Шар вместе со сферой, служащей его поверхностью, представляет собою многообразие с краем; указанная сфера как раз и является этим краем. Если удалить этот шар из окружающего пространства, получится многообразие без края. Если убрать с шара его поверхность, получится то, что на математическом жаргоне называется «ошкуренный шар», а в более научном языке - открытый шар. Если удалить открытый шар из окружающего пространства, получится многообразие с краем, и краем будет служить та самая сфера, которую мы содрали с шара. Баранка вместе со своей корочкой есть трёхмерное многообразие с краем, а если отодрать корочку (которая трактуется как бесконечно тонкая, то есть как поверхность), получится многообразие без края в виде «ошкуренной баранки». Всё пространство в целом, если понимать его так, как оно понимается в средней школе, есть трёхмерное многообразие без края. Математическое понятие компактность отчасти отражает тот смысл, какой слово «компактный» имеет в повседневном русском языке: «тесный», «сжатый». Геометрическая фигура называется компактной, если при любом расположении бесконечного числа её точек они накапливаются к одной из точек или ко многим точкам этой же фигуры. Отрезок компактен: для любого бесконечного множества его точек в отрезке найдётся хотя бы одна так называемая предельная точка, любая окрестность которой содержит бесконечно много элементов рассматриваемого множества. Интервал не компактен: можно указать такое множество его точек, которое накапливается к его концу, и только к нему, - но ведь конец не принадлежит интервалу. Из рассмотренных примеров компактными являются отрезок, окружность, сфера, поверхности баранки и кренделя, шар (вместе со своей сферой), баранка и крендель (вместе со своими корочками). Напротив, интервал, плоскость, ошкуренные шар, баранка и крендель не являются компактными. Среди трёхмерных компактных геометрических фигур без края простейшей является трёхмерная сфера, но в нашем привычном «школьном» пространстве такие фигуры не умещаются.

Самое глубокое из тех понятий, которые связывает между собой гипотеза Пуанкаре, - это понятие гомеоморфии. Гомеоморфия - это наиболее высокая ступень геометрической одинаковости. Существует два вида одинаковости - с конгруэнтностью фигур и с их подобием. Напомним, что фигуры называются конгруэнтными, если они совпадают друг с другом при наложении. В школе конгруэнтные фигуры как бы не различают, и потому конгруэнтность называют равенством. Конгруэнтные фигуры имеют одинаковые размеры во всех своих деталях. Подобие же, не требуя одинаковости размеров, означает одинаковость пропорций этих размеров; поэтому подобие отражает более сущностное сходство фигур, нежели конгруэнтность. Геометрия в целом - более высокая ступень абстракции, нежели физика, а физика - чем материаловедение. Например, шарик подшипника, биллиардный шар, крокетный шар и мяч. Физика не вникает в такие детали, как материал, из которого они сделаны, а интересуется лишь такими свойствами, как объём, вес, электропроводность и т. п. Для математики - все они шары, различающиеся только размерами. Если шары имеют разные размеры, то они различаются для метрической геометрии, но все они одинаковы для геометрии подобия. С точки зрения геометрии подобия одинаковы и все шары, и все кубы, а вот шар и куб - не одинаковы. А теперь посмотрим на тор. Тор - эта та геометрическая фигура, форму которой имеют баранка и спасательный круг. Энциклопедия определяет тор как фигуру, полученную вращением круга вокруг оси, расположенной вне этого круга. Шар и куб «более одинаковы» между собой, чем каждый из них с тором. Наполнить это интуитивное осознание точным смыслом позволяет следующий мысленный эксперимент. Представим себе шар сделанным из материала столь податливого, что его можно изгибать, растягивать, сжимать и, вообще, деформировать как угодно, - нельзя только ни разрывать, ни склеивать. Очевидно, что шар тогда можно превратить в куб, но вот в тор превратить невозможно.

Две фигуры называются гомеоморфными, если одну можно превратить в другую путём непрерывной (т. е. без разрывов и склеивании) деформации; сами такие деформации называются гомеоморфизмами. Шар гомеоморфен кубу и пирамиде, но не гомеоморфен ни тору, ни кренделю, а последние два тела не гомеоморфны между собой.

Философский аспект понятия гомеоморфии

Можно представить мыслящее существо, живущее внутри какой-либо геометрической фигуры и не обладающее возможностью посмотреть на эту фигуру извне, «со стороны». Для него фигура, в которой оно живёт, образует Вселенную. Можно также представить, что, когда объемлющая фигура подвергается непрерывной деформации, существо деформируется вместе с нею. Если фигура, о которой идёт речь, является шаром, то существо никаким способом не может различить, пребывает ли оно в шаре, в кубе или в пирамиде. Однако для него не исключена возможность убедиться, что его Вселенная не имеет формы тора или кренделя. Вообще, существо может установить форму окружающего его пространства лишь с точностью до гомеоморфии, то есть оно не в состоянии отличить одну форму от другой, коль скоро эти формы гомеоморфны.

Вывод

Для математики значение гипотезы Пуанкаре, превратившейся теперь из гипотезы в теорему Пуанкаре - Перельмана, огромно (не зря ведь за решение проблемы был предложен миллион долларов), равно как огромно и значение найденного Перельманом способа её доказательства. Некоторые авторитетные специалисты заявляют, что осуществлённый Перельманом научный прорыв может помочь в исследовании процессов формирования чёрных дыр. Чёрные дыры служат прямым опровержением положения о познаваемости мира - одного из центральных положений того самого передового, единственно верного и всесильного учения. Но никакие сигналы из этих дыр не могут к нам поступать в принципе, так что узнать, что там происходит, невозможно. О том, как устроена Вселенная в целом, человечество знает очень мало, и сомнительно, что когда-нибудь узнает. Да и сам смысл вопроса о её устройстве не вполне ясен. Не исключено, что этот вопрос относится к числу тех, на которые, согласно учению Будды, не существует ответа. Физика предлагает лишь модели устройства, более или менее согласующиеся с известными фактами. При этом физика, как правило, пользуется уже разработанными заготовками, предоставляемыми ей математикой. Математика не претендует, разумеется, на то, чтобы установить какие бы то ни было геометрические свойства Вселенной. Но она позволяет осмыслить те свойства, которые открыты другими науками. Более того, она позволяет сделать более понятными некоторые такие свойства, которые трудно себе вообразить, она объясняет, как такое может быть. К числу таких возможных свойств относятся конечность Вселенной и её неориентируемость.

Долгое время единственной мыслимой моделью геометрического строения Вселенной служило трёхмерное евклидово пространство, то есть то пространство, которое известно всем и каждому из средней школы. Это пространство бесконечно; казалось, что никакие другие представления и невозможны; помыслить о конечности Вселенной казалось безумием. Однако ныне представление о конечности Вселенной не менее законно, чем представление о её бесконечности. В частности, конечна трёхмерная сфера. Одни физики отвечают «скорее всего. Вселенная бесконечна», другие же - «скорее всего, Вселенная конечна».

Список использованной литературы:

1) Перельман, Григорий Яковлевич (электронный ресурс) URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Перельман,_Григорий_Яковлевич
2) Гипотеза Пуанкаре (электронный ресурс) URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Гипотеза_Пуанкаре
3) Теория, теорема Пуанкаре - Перельмана в популярном изложении по В.А. Успенскому (электронный ресурс) URL: https://vikent.ru/enc/2213/