

Нахождение области определения функции

Гараева Шамила Ильдаровна

студентка факультета иностранных языков

Елабужского Института КФУ,

Научный руководитель: кандидат физ.-мат. наук

Миронова Юлия Николаевна

Аннотация: *В статье описана технология нахождения области определения функций с соответствующими примерами.*

Функция - одно из основных математических и общенаучных понятий. Оно сыграло и поныне играет большую роль в познании реального мира. Понятие функции уходит своими корнями в ту далёкую эпоху, когда люди впервые поняли, что окружающие их явления взаимосвязаны. Зависимость между величинами помогала им в быту, выявляя насколько или во сколько больше то или иное благо. Именно это предшествовало созданию чисел и самому развитию математики.

Что касается современного видения функции и её графика, то она является самым простейшим способом визуального представления информации. А область определения функции – одним из основных её характеристик.

Функция – правило, по которому каждому элементу x их множества X ставится в соответствие единственный элемент y из множества Y , где x — независимая переменная (аргумент), y — зависимая переменная, или, проще говоря, функция – это отображение из X в Y .

Областью определения функции называется множество, на которое отображается независимая переменная.

Пусть задано $f : X \rightarrow Y$, тогда X – область определения функции, обозначаемая $D(f)$ или $\text{dom } f$ (от английского *domain* – «область»).

Для тригонометрических функций могут использоваться собственные обозначения как $D(\arcsin)$, $D(\cos)$, $D(\operatorname{tg})$ и т. д.

В этом случае понятие звучит как: «Область определения функции — это область, где определена функция». Для того, чтобы придать ему более точный смысл, рассматривается некоторое более широкое множество, которое называется областью отправления, и тогда область определения функции $E = \operatorname{dom} f$ — это такое подмножество множества X , где для каждого элемента $x \in E$ определено значение функции $f(x \in Y)$.

Этот факт коротко записывают в виде: $f : X \supset E \rightarrow Y$.

Элементарные функции

Нахождение области определения элементарной функции довольно просто. Если формула представлена в форме $f(x)=C$, тогда $D(y) = (-\infty; +\infty)$, или же просто $D(y)=R$.

В случае, если формула представлена в виде дроби, не стоит лишь забывать, что выражение, стоящее в знаменателе не равно 0:

Пусть задана функция $f(x) = \frac{1}{x-1}$, тогда $x-1 \neq 0$. Следовательно,

$$D(y) = \{x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)\}.$$

Если функция представлена в виде суммы или разницы двух частей, то в следует найти области определения разных частей отдельно и в конце найти их пересечение:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2} \Rightarrow D(y) = \{x | (x-1 \neq 0) \cap (x+2 \neq 0)\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow D(y) = \{x \in (-\infty; -2) \cup (2; 1) \cup (1; +\infty)\}. \end{aligned}$$

Сложности могут возникнуть лишь с другими типами функций.

Функции с корнем

Если в функции $f(x) = \sqrt[n]{x}$, n — нечётное число, то $D(y)=R$. Применение ограничения необходимо лишь в случае, если n — четное число. Тогда выражение под корнем с чётной степенью больше или равно 0:

$$f(x) = \sqrt[n]{x}, n=2k \Rightarrow D(y) = \{x \in [0; +\infty)\};$$

$$f(x) = \frac{16}{\sqrt[4]{4-x}} \Rightarrow D(y) = \{x | (4-x \geq 0) \cap (\sqrt[4]{4-x} \neq 0)\} \Rightarrow D(y) = \{x \in (-\infty; 4)\}.$$

Степенные функции

Они представлены в виде $f(x) = x^n$. Рассмотрим все варианты n :

1) если n – положительное целое число, то $D(x) = \{x \in (-\infty; +\infty)\}$:

$$f(x) = x^6 \Rightarrow D(x) = \{x \in (-\infty; +\infty)\};$$

2) если n – нецелое положительное число, то $D(y) = \{x \in (0; +\infty)\}$:

$$f(x) = x^{\sqrt{19}} \Rightarrow D(y) = \{x \in (0; +\infty)\};$$

3) если n – целое отрицательное число, $D(y) = \{x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)\}$:

$$f(x) = x^{-3} \Rightarrow D(y) = \{x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)\};$$

4) в случаях n – отрицательное нецелое число, область определения будет числовым промежутком $(0; +\infty)$:

$$f(x) = x^{-\frac{3}{5}} \Rightarrow D(y) = \{x \in (0; +\infty)\};$$

5) если n имеет нулевое значение, то такая степенная функция будет определена для всех действительных n , кроме нулевого. Это связано с неопределенностью 0^0 . Мы знаем, что любое число, кроме 0, при возведении в нулевую степень будет равно 1, тогда при $a=0$ у нас получится функция $y = x^0 = 1$, область определения которой $D(y) = \{x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)\}$.

Показательные функции

В случае показательных функций область определения $f(x) = a^x$, областью определения может быть любое число от минус бесконечности и плюс бесконечности. Например,

$$f(x) = 16^{4x+3} \Rightarrow D(y) = R.$$

Логарифмические функции

Логарифмические функции, представленные в виде $f(x) = \log_a x$, требуют лишь соблюдения некоторых ограничений:

1) основание строго больше нуля и не равно одному;

2) выражение под знаком логарифма строго больше нуля.

Например,

$$f(x) = \frac{\ln(x-5)}{x+3} \Rightarrow D(y) = \{x | (x-5 > 0) \cap (x+3 \neq 0)\} \Rightarrow D(y) = \{x \in (5; +\infty)\};$$

$$f(x) = \log_{x-1} 3x \Rightarrow D(y) = \{x | (x-1 > 0) \cap (x-1 \neq 1) \cap (3x > 0)\} \Rightarrow D(y) = \{x \in (1; 2) \cup (2; +\infty)\}$$

Тригонометрические функции

Область определения функций с синусом и косинусом всегда будет равна любому действительному числу:

$$y = \sin x \Rightarrow D(y) = R;$$

$$y = \cos x \Rightarrow D(y) = R.$$

Формулы функций тангенса и котангенса представляются в виде $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ соответственно. Областями их определения будет множество всех действительных чисел, за исключением точек, где они не существуют:

$$y = \operatorname{tg} x \Rightarrow D(y) = \{x \in R | x \neq 2\pi + \pi k, k \in Z\};$$

$$y = \operatorname{ctg} x \Rightarrow D(y) = \{x \in R | x \neq \pi k, k \in Z\}.$$

Обратные тригонометрические функции

Функции $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$ означают арктангенс и арккотангенс. Они рассматриваются на множестве всех действительных чисел, значит, областью их определения является R . Можем записать, что $D(\operatorname{arctg}) = R$ и $D(\operatorname{arcctg}) = R$.

$$y = \operatorname{arctg} x \Rightarrow D(y) = R \Rightarrow D(\operatorname{arctg}) = R;$$

$$y = \operatorname{arcctg} x \Rightarrow D(y) = R \Rightarrow D(\operatorname{arcctg}) = R.$$

Выражения под знаками $\arccos$, $\arcsin$ в функциях арккосинуса и арксинуса находятся в промежутке $[-1; 1]$. То есть:

$$y = \arcsin(x + 5) \Rightarrow D(y) = \{x \in [-6; -4]\};$$

$$y = \arccos(x - 3) \Rightarrow D(y) = \{x \in [-2; 4]\}$$

Квадратичные функции

Область определения квадратичных функций, имеющих вид $f(x) = ax^2 + bx + c$, всегда равна R :

$$y = 2x^2 - 5x + 6 \Rightarrow D(y) = R.$$

Список литературы:

1) Колмогоров А. Н. Алгебра и начала анализа. Москва:

"Просвещение", 1990 года.

2) А.С. Березина, Л.Н. Гавришина, А.Г. Седых Математический

анализ: дифференциальное исчисление / Учебное пособие / Кемерово 2012

3) Никольский С.Н. Курс математического анализа, учебник. Москва:

"Физматлит", 2002 года.