Теорема произведения вероятностей

Бострикова Юлия Семеновна

Елабужский институт Казанского (Приволжского) федерального университета

Научный руководитель: кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры математики и прикладной информатики ЕИ КФУ Миронова Юлия Николаевна

Введение

Теория вероятностей – это наука, занимающаяся изучением закономерностей случайных событий. Ее главные задачи: исследование влияния заданного фактора на случайную величину, установление статистической значимости различия случайных значений (сравнение результатов применения нового и старого вида лекарств для принятия решения о том, действительно ли новое лекарство лучше). Вероятность – это степень возможности наступления того или иного события. Предположим, что событие имеет n возможных исходов, которые имеют равную степень возможности, и некоторое событие A, которое появляется при каждом исходе m. Тогда в данном случае имеется n исходов, из которых m благоприятствуют появлению события A. Вероятность события A равна отношению числа благоприятствующих исходов к числу всевозможных исходов: $P(A) = \frac{m}{n}$.

События – произвольное множество некоторого множества всех возможных исходов. События делятся на

- достоверные (заведомо произойдут при соблюдении определенных условий),
- невозможные (заведомо не произойдет даже при соблюдении определенных условий),
- случайные (могут либо произойти, либо не произойти).

Событие A называется независимым от события B, если вероятность A не зависит от того, произошло событие B или нет.

Событие A называется зависимым от события B, если вероятность события A меняется в зависимости от того, произошло событие B или нет.

Условной вероятностью $P_A(B) = P(B|A)$ называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A уже наступило.

Теорема 1: Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятностей одного из них на условную вероятность другого, полученную при условии, что первое событие произошло:

$$P(AB) = P(A) * P(B|A).$$

Рассмотрим примеры решения задач.

Пример 1: В урне 2 белых и 3 черных шара. Из урны вынимают подряд два шара и не возвращают. Найти вероятность того, что оба шара белые.

Решение: Всего существует 5 исходов. Из них 2 исхода, в которых оба шара белые. Пусть событие A - появление двух белых шаров. Тогда$A = A_1 * A_2$, где событие A_1 - появление белого шара при первом вынимании, A_2 - появление белого шара при втором вынимании.

Количество всех исходов $n_1 = 5$, количество исходов, при которых первый шар будет белым, $m_1 = 2$, значит, вероятность события $A_1 = \frac{m_1}{n_1} = \frac{2}{5}$.

Количество всех исходов события A_2 $n_2 = 4$, так как один из исходов случился во время первого изъятия, количество исходов с изъятием белого шара также уменьшилось $m_2 = 1$ значит, вероятность события $A_2 = \frac{m_2}{n_2} = \frac{1}{4}$.

Тогда по теореме умножения вероятностей $P(A) = P(A_1A_2) = P(A_1) * P(A_2|A_1) = \frac{2}{5} * \frac{1}{4} = \frac{1}{10} = 0{,}1$.

Ответ: 0,1

Пример 2: В урне 2 белых и 3 черных шара. Из урны вынимают подряд два шара. После первого вынимания шар возвращается в урну, и шары в урне перемешиваются. Найти вероятность того, что оба шара белые.

Решение: Всего исходов $m = 5$. Если мы имеем всего 2 белых шара, то вероятность изъятия белого шара $n = 2$. Так как после каждого изъятия шары возвращаются в урну, события A_1 и A_2 являются независимыми друг от друга. Вероятность события $A_1 = \frac{2}{5}$. Вероятность события $A_2 = \frac{2}{5}$. События A_1 и A_2 независимы, значит искомая вероятность $P(A) = P(A_1A_2) = P(A_1) * P(A_2) = \frac{2}{5} * \frac{2}{5} = \frac{4}{25} = 0{,}16$

Ответ: $0{,}16$

Пример 3: Вероятность остановки станков, обслуживаемых одним рабочим, на протяжении одного часа составляет для I станка 0,2, для II станка - 0,15, и для III станка - 0,12. Какова вероятность бесперебойной работы всех трех станков на протяжении одного часа?

Решение: Бесперебойность работы станка – событие противоположное работе с остановкой. Поэтому, если дано $P_1 = 0{,}2$, $P_2 = 0{,}15$, $P_3 = 0{,}12$, то вероятности $q = 1 - p$ бесперебойной работы для станков составят $q_1 = 1 - P(A_1) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$, $q_2 = 1 - P(A_2) = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$, $q_3 = 1 - P(A_3) = 1 - 0{,}12 = 0{,}88$. Если работа каждого станка не зависит от работы других станков, то по теореме умножения вероятностей $P(I * II * III) = 0{,}8 * 0{,}85 * 0{,}88 = 0{,}5984$.

Ответ:$0{,}5984$

Таким образом, мы рассмотрели некоторые примеры решения задач теории вероятностей, которые могут использоваться на практических занятиях по математике как в школе, так и в вузе.

Список литературы:

1. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. Москва: УРСС, 2005
2. Ширяев А. Н. Вероятность. Москва: МЦНМО, 2004

3. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Москва: «Мир», 1984
4. Боровков А. А. Теория вероятностей. Москва: «Едиториал», 2003