Геометрическое определение вероятности

Краснова Арина Анатольевна,
ЕИ КФУ,
факультет иностранных языков
Научный руководитель:
Миронова Юлия Николаевна

Аннотация: в статье рассматривается геометрическое определение вероятности и его применение в решении задач по высшей математике.

Вероятностью события А называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу.

Итак, вероятность события А определяется формулой:

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad (1)$$

где m – число элементарных исходов, благоприятствующих А;
n – число всех возможных элементарных исходов испытания.

Классическое определение вероятности оказывается эффективным для решения целого спектра задач, но оно неприменимо к испытаниям с бесконечным количеством исходов.

Например, на отрезок *[0;1]* (область D) наудачу «бросается точка». Это значит, что точка «бросается в область D наугад» - не отдается предпочтение никаким точкам, никаким подобластям области D. Какова вероятность того, что она попадёт в промежуток *[0,4;0,7]*?

Поскольку на отрезке бесконечно много точек, то здесь нельзя применить формулу (1) (т.к. *n* – бесконечно больше число значений), и поэтому на помощь приходит другой подход, называемый **геометрическим определением вероятности**.

Будем считать, что мера

mes (отрезка) – равна длине отрезка;

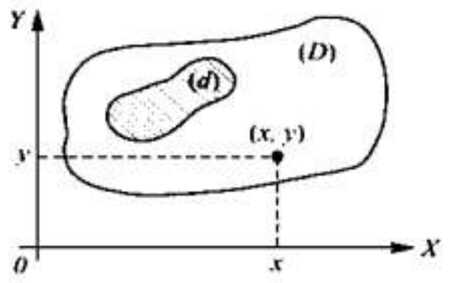
mes (полной фигуры) – равна площади фигуры;

mes (тела) – равна объему этого тела.

Геометрическая вероятность события А определяется по формуле:

$$P(A) = \frac{mes\ (\text{числа элементарных исходов опыта,благоприятствующих собынию А})}{mes\ (\text{полной группы элементарных исходов опыта})}$$ **=>**

$$\boxed{P\{\textit{случайная точка попала в } (d) \subset (D)\} = \frac{\mathrm{mes}(d)}{\mathrm{mes}(D)}}\ .$$



Попадание точки в подобласть (d) области (D)

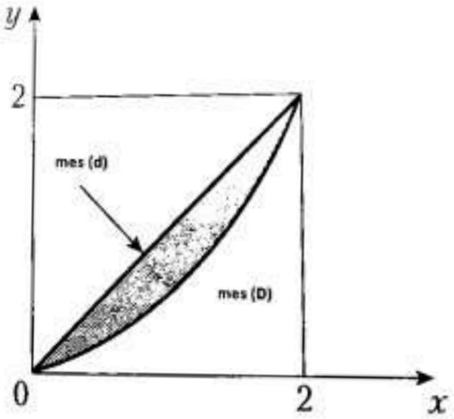
Где: mes (D) - это мера области (D), mes (d) – мера подобласти (d). Если (D) – плоская область $((D) \subset R^2)$, то mes (D) – это площадь; если (D) промежуток на прямой $((D) \subset R^1)$, то mes (D) – длина этого промежутка; если $((D) \subset R^3)$, то mes (D) – это ее объем; если (D) – временной промежуток, то и измерять его будем в секундах, минутах, часах.

Примечание: в геометрической вероятности в числителе должна быть такая же мера, как в знаменателе.

Пример 1.

На отрезке [0;2] наудачу выбраны два числа x и y. Найти вероятность того, что эти числа удовлетворяют неравенству $x^2 \le 4y \le 4x$.

Решение: Нам известно, что $0 \le x \le 2$ и $0 \le y \le 2$. Для их изображения воспользуемся системой координат. Точки с координатами (x,y) заполнят квадрат со сторонами, равными 2 ед. Решим графически систему неравенств $4y \le 4x$, $x^2 \le 4y$.



Применим геометрическое определение вероятности (где мера областей – площадь).

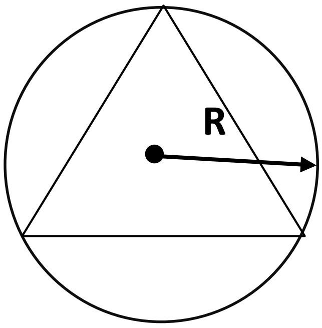
$$P(A) = \frac{mes\,(d)}{mes\,(D)} = \frac{\int_0^2 \left(x - \frac{x^2}{4}\right) dx}{4} = \frac{\left.\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12}\right)\right|_0^2}{4} = \frac{2 - \frac{2}{3}}{4} = \frac{1}{3}$$

Ответ: $\frac{1}{3}$

Пример 2.

Внутрь круга радиуса R наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в этот круг правильного треугольника. Предполагается, что вероятность попадания точки в треугольник пропорциональна площади треугольника и не зависит от его расположения относительно круга.

Решение:



Обозначим событие. А – точка, наудачу брошенная в круг.

Площадь круга радиуса R равна S1=πR^2; площадь вписанного в круг правильного треугольника равна S2=$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где а – сторона треугольника. Известно, что а=R$\sqrt{3}$, поэтому S2=$\frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$. Следовательно, вероятность события А равна $P(A) = \frac{S2}{S1} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$

Пример 3.

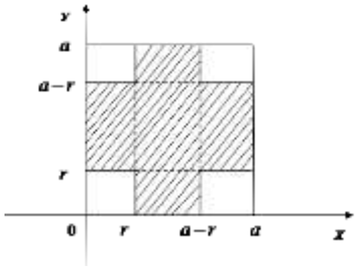
На бесконечную шахматную доску со стороной квадрата *a* наудачу бросается монета радиуса $r < \frac{a}{2}$. Найти вероятности следующих событий:

A - «монета попадет целиком внутрь одного квадрата»,

B - «монета пересечет не более одной стороны квадрата».

Решение: Пусть (*x, y*)— координаты центра упавшей монеты. В силу бесконечности шахматной доски можно считать, что элементарные исходы данного эксперимента полностью определяются положением центра упавшей монеты относительно вершин квадрата, содержащего этот центр. Помещая начало координат в одну из вершин указанного квадрата можно записать множество элементарных исходов в виде 0$\le x \le a$, $0 \le y \le a$. Множество, соответствующее событию *A*: $x \ge r$, $y \le a - r$, т.е. является квадратом со стороной $a - 2r$.

Следовательно, $S_b = (a - 2r)^2$; $S = a^2$; $P = \frac{(a-2r)^2}{a^2}$.



$$S_b = a^2 - 4r^2; P = \frac{a^2-4r^2}{a^2} = 1 - 4\frac{r^2}{a^2}.$$

Ответ: $P\ (A) = \frac{a^2-4r^2}{a^2}; P(B) = 1 - 4\frac{r^2}{a^2}$.

Таким образом, мы рассмотрели понятие геометрической вероятности и его применение при решении конкретных задач.

Литература

1) Хрущёва И.В. Теория вероятностей: учебное пособие. – СПб.: Издательство «Лань», 2009. – 304 стр.
2) Блягоз З. У. Теория вероятностей и математическая статистика. Курс лекций: Учебное пособие. – 2-е изд., испр. – СПб.: Издательство «Лань», 2018. – 224 стр.
3) Богомолов Ю. В. Теория вероятностей и математическая статистика: сборник задач/ сост. Ю.В. Богомолов, А.Н. Максименко, А.Н. Морозов. – 2-е изд., перераб. и доп. – Яросл. гос. ун-т. - Ярославль: ЯрГУ, 2009 – 111 стр.