Декартово произведение множеств – определение, свойства и примеры решения задач

Губайдуллина Рузалия Мадарисовна

студентка факультета иностранных языков

Елабужского Института КФУ,

Научный руководитель: Миронова Юлия Николаевна

Аннотация: В статье ставится задача рассмотрения понятия декартова произведения множеств, его свойства, примеры решения задач по данной теме.

Множество - совокупность некоторых элементов, объединенных каким-либо общим признаком.

Декартовым произведением множеств A и B называется множество упорядоченных пар, первая компонента которых принадлежит множеству A, вторая - множеству B. Обозначают $A \times B$. Таким образом,

$$A \times B = \{(a;b) | a \in A, b \in B\}$$

Два элемента a и b называются упорядоченной парой, если указано, какой из этих элементов первый, какой второй, при этом:

$$((a;b) = (c;d)) \Leftrightarrow (a = c \wedge b = d).$$

Операцию нахождения декартового произведения множеств A и B называют декартовым умножением этих множеств.

Рассмотрим несколько свойств декартова произведения множеств:

1. Если A, B — конечные множества и $|A| = n$, $|B| = m$, то $A \times B$ тоже конечное множество, причем $|A \times B| = n \cdot m$. И наоборот, если одно из множеств-сомножителей бесконечное, то и результат их произведения — бесконечное множество. В частности, можно говорить о декартовом произведении множества A на себя, т. е. $A \times A$. Декартово произведение множества A на себя называют декартовым квадратом множества A и обозначают символом

A^2. Другими словами, $A^2=\{d|d=(x;y),x,y\in A\}$. Например, если $A=\{a;b\}$, то $A^2=\{(a;a),(a;b),(b;a),(b;b)\}$.

2. Количество элементов в декартовом произведении равно произведению чисел элементов множеств-сомножителей (в случае их конечности, разумеется): $|A\times B|=|A|\cdot|B|$.
3. Если $A\neq B$, то $A\times B\neq B\times A$. Действительно, если $x\in A,y\in B$, то $(x;y)\in A\times B$, а $(y;x)\in B\times A$. Но так как $x\neq y$, то $(x;y)\neq(y;x)$. Отсюда $A\times B\neq B\times A$.
4. Декартово произведение множеств не обладает свойством ассоциативности: $(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)$ для любых множеств A,B,C.
5. Если хотя бы одно из множеств *A* или *B* пусто, то и декартово произведение этих множеств есть пустое множество:
   $A\times\varnothing=\varnothing\times B=\varnothing\times\varnothing=\varnothing$
6. Для любых трех множеств *A*, *B*, *C* справедливы следующие утверждения:
   6.1. $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$
   6.2. $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$
   6.3. $A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C)$

Приведем примеры решения задач.

Пример 1. Найдите $A\times B$, если $A=\{5;6\},B=\{7;8;9\}$.

Решение. $A\times B=\{(5;7),(5;8),(5;9),(6;7),(6;8),(6;9)\}$.

Пример 2. Запишите множество дробей K, числителем которых являются числа из множества $A=\{1;2\}$, а знаменателем – числа из множества $B=\{3;5\}$.

Решение. $K=\left\{\frac{1}{3};\frac{1}{5};\frac{2}{3};\frac{2}{5}\right\}$.

Пример 3. Найдите $A\times B$, если $A=\{\lozenge;\nabla\}$, $B=\{2;8\}$.

Решение. $A\times B=\{(\lozenge;2),(\lozenge;8),(\nabla;2),(\nabla;8)\}$.

Пример 4. Найдите A^2, если $A=\{3;4\}$.

Решение. $A^2=A\times A=\{(3;3),(3;4),(4;3),(4;4)\}$.

Пример 5. Докажите, что $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$, если $A=\{2;3;4\},B=\{4;6\},C=\{6;7\}$.

Решение. Найдем объединение множеств A и B: $A \cup B = \{2,3,4,6\}$. Далее перечислим элементы множества $(A \cup B) \times C$, используя определение декартова произведения: $(A \cup B) \times C = \{(2;6),(2;7),(3;6),(3;7),(4;6),(4;7),(6;6),(6;7)\}$.

Чтобы найти элементы множества $(A \times C) \cup (B \times C)$, перечислим сначала элементы множеств $A \times C$ и $B \times C$:

$A \times C = \{(2;6),(2;7),(3;6),(3;7),(4;6),(4;7)\}$

$B \times C = \{(4;6),(4;7),(6;6),(6;7)\}$

Найдем объединение полученных декартовых произведений: $(A \times C) \cup (B \times C) = \{(2;6),(2;7),(3;6),(3;7),(4;6),(4;7),(6;6),(6;7)\}$.

Видим, что множества $(A \cup B) \times C$ и $(A \times C) \cup (B \times C)$ состоят из одних и тех же элементов, следовательно, для данных множеств *A, B* и *C* справедливо равенство $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

Таким образом, мы рассмотрели возможность применения конкретных задач при изучении теории множеств на занятиях по высшей математике в высших учебных заведениях.

Список литературы:

1. Аминова А.В. Элементы теории множеств. - Казань: Казанский гос. ун-т, 2008. – 46 с.
2. Верещагин Н.К., Шень А. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Начала теории множеств. М.: МЦНМО. 1999. — 124 с.
3. Киреенко С.Г., Гриншпон И.Э. Элементы теории множеств(учебное пособие). – Томск, 2003. – 42 с.
4. Белова, Л. Ю. Элементы теории множеств и математическойлогики. Теория и задачи: учебное пособие. Ярославль: ЯрГУ, 2012. – 204 с.
5. Множества, отношения, функции: учеб. пособие / Н.Ю. Сабурова.- Архангельск: Арханг. гос. тех. ун-т, 2008. - 80 с.