Решение систем уравнений и неравенств при нахождении области определения функции

Ларионова Мария Александровна

студентка факультета иностранных языков

Елабужского Института КФУ

Научный руководитель:

Миронова Юлия Николаевна

<u>Аннотация</u>: в статье рассматривается на конкретных примерах решение систем уравнений и неравенств при определении области определения функции.

Важной задачей математических исследований является определение области определения функции.

Обозначим D_f – область определения функции.

Для определения D_f существуют следующие условия:

1) Если есть знаменатель, то выражение, стоящее в знаменателе $\neq 0$;
2) Выражение, стоящее в корне четной степени ≥ 0;
3) Выражение, стоящее под знаком логарифма, > 0;
4) Выражение, стоящее под знаком функции arcsin или arccos находится в промежутке [-1; 1];
5) Основание степени с иррациональным показателем > 0.

Если функция раскладывается на несколько уравнений или неравенств, то области определения пересекаются

Пример 1.

Найти область определения функции

$$f(x) = \sqrt{(x-3)(x+4)} + \ln\big((x-2)(x+1)\big) + \arcsin((x-4)(x+2))$$

Решение:

Составим систему неравенств

$$(1)\begin{cases} (x-3)(x+4) \geq 0 \\ (x-2)(x+1) > 0 \\ -1 \leq (x-4)(x+2) \leq 1 \end{cases}$$

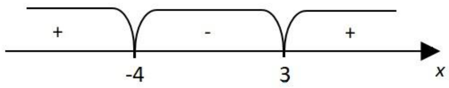
1) Решим первое неравенство системы (1)

$(x-3)(x+4) \geq 0$

$(x-3)(x+4) = 0$

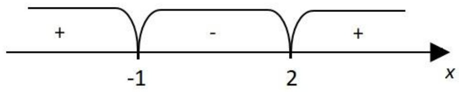
$x = 3; x = -4$

$(x-3)(x+4) \geq 0$



$x \in (-\infty; -4]$, тогда$(x-3)(x+4) \geq 0$
$x \in [-4; 3]$, тогда $(x-3)(x+4) \leq 0$
$x \in [3; +\infty)$, тогда$(x-3)(x+4) \geq 0$
Следовательно $x \in (-\infty;\ -4] \cup [3;\ +\infty)$

2) Решим второе неравенство системы (1)
$(x-2)(x+1) > 0$
$(x-2)(x+1) = 0$
$x = 2;\ x = -1$
$(x-2)(x+1)$



$x \in (-\infty; -1)$, тогда $(x-2)(x+1) > 0$
$x \in (-1; 2)$, тогда $(x-2)(x+1) < 0$
$x \in (2; +\infty)$, тогда $(x-2)(x+1) > 0$
Следовательно $x \in (-\infty; 1) \cup (2;\ +\infty)$

3) Решим третье неравенство системы (1)
$-1 \leq (x-4)(x+2) \leq 1$
Представим неравенство как системунеравенств

$$(2)\begin{cases}(x-4)(x+2) \geq -1 \\ (x-4)(x+2) \leq 1\end{cases} \begin{cases} x \in [1-\sqrt{10}; 1+\sqrt{10}] \\ x \in \left(-\infty; 1-2\sqrt{2}\right] \cup [1+2\sqrt{2};\ +\infty)\end{cases}$$

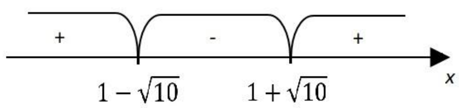
Решим первое неравенство системы (2)

$(x-4)(x+2) \leq 1$
$(x-4)(x+2) - 1 \leq 0$
$x^2 - 2x - 4x - 8 - 1 \leq 0$
$x^2 - 2x - 9 \leq 0$
$x^2 - 2x - 9 = 0$
Решим квадратное уравнение
$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-9) = 40$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{2+\sqrt{40}}{2} = 1+\sqrt{10}$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{2-\sqrt{40}}{2} = 1-\sqrt{10}$$

$$\left(x-\left(1-\sqrt{10}\right)\right)\left(x-\left(1+\sqrt{10}\right)\right) = 0$$



$x \in (-\infty; 1-\sqrt{10})$, тогда $(x-\left(1-\sqrt{10}\right))(x-\left(1+\sqrt{10}\right)) \geq 0$
$x \in \left(1+\sqrt{10}; +\infty\right)$, тогда $\left(x-\left(x-\sqrt{10}\right)\right)\left(x-\left(1+\sqrt{10}\right)\right) \geq 0$

$x \in [1-\sqrt{10}; 1+\sqrt{10}]$, тогда $\left(x-\left(x-\sqrt{10}\right)\right)\left(x-\left(x+\sqrt{10}\right)\right) \leq 0$

Следовательно $x \in [1-\sqrt{10}; 1+\sqrt{10}]$

Решим второе неравенство системы (2)

$(x-4)(x+2) \geq -1$

$(x-4)(x+2)+1 \geq 0$

$x^2-2x+4x-8+1 \geq 0$

$x^2-2x-7 \geq 0$

$x^2-2x-7=0$

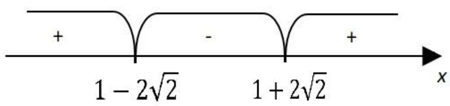
Решим квадратное уравнение

$D=b^2-4ac=(-2)^2-4\times 1\times(-7)=32$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{2+\sqrt{32}}{2}=1+2\sqrt{2}$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{2-\sqrt{32}}{2}=1-2\sqrt{2}$$

$\left(x-\left(1+2\sqrt{2}\right)\right)\left(x-\left(1-2\sqrt{2}\right)\right) \geq 0$



$x \in \left(-\infty; 1-2\sqrt{2}\right]$, тогда $\left(x-\left(1+2\sqrt{2}\right)\right)\left(x-\left(1-2\sqrt{2}\right)\right) \geq 0$

$x \in \left[1-2\sqrt{2}; 1+2\sqrt{2}\right]$, тогда $\left(x-\left(1+2\sqrt{2}\right)\right)\left(x-\left(1-2\sqrt{2}\right)\right) \leq 0$

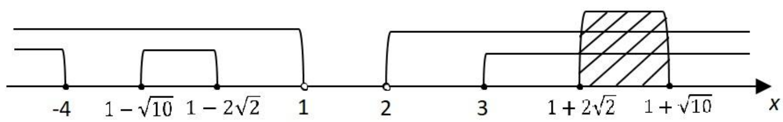
$x \in \left[1+2\sqrt{2}; +\infty\right)$, тогда $\left(x-\left(1+2\sqrt{2}\right)\right)\left(x-\left(1-2\sqrt{2}\right)\right) \geq 0$

Следовательно $x \in \left(-\infty; 1-2\sqrt{2}\right] \cup \left[1+2\sqrt{2}; +\infty\right)$

4) Вернемся к системе неравенств (1), чтобы найти общее решение

Система (1) имеет вид

$$\begin{cases}(x-3)(x+4) \geq 0\\(x-2)(x+1) > 0\\-1 \leq (x-4)(x+2) \leq 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(x-3)(x+4) \geq 0\\(x-2)(x+1) > 0\\-1 \leq (x-4)(x+2) \leq 1\end{cases} \Rightarrow$$



5) Общее решение: $x \in [1+2\sqrt{2}; 1+\sqrt{10}] \Rightarrow D_f = \{x \in \left[1+2\sqrt{2}; 1+\sqrt{10}\right]\}$

Ответ: $D_f = \{x \in \left[1+2\sqrt{2}; 1+\sqrt{10}\right]\}$

Пример 2.

Найти область определения функции

$$f(x)=\frac{1}{(x-1)(x-2)}+\frac{2x}{\sqrt{x^2-2x-9}}$$

Решение:

Составим систему неравенств

$$\begin{cases}(x-1)(x-2) \neq 0 \\ \sqrt{x^2-2x-9} \neq 0 \\ x^2-2x-9 \geq 0\end{cases}$$

1) Решим первое неравенство системы

$(x-1)(x-2) \neq 0$

$x \neq 1$

$x \neq 2$

2) Решим второе неравенство системы

$$\sqrt{x^2-2x-9} \neq 0 \quad ^2$$

$x^2-2x-9=0$

Решим квадратное уравнение

$D=b^2-4ac=(-2)^2-4\times 1\times(-9)=4+36=40$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{2+\sqrt{40}}{2}=1+\sqrt{10}$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{2-\sqrt{10}}{2}=1-\sqrt{10}$$

$$\left(x-\left(1-\sqrt{10}\right)\right)\left(1-\left(1+\sqrt{10}\right)\right)=0$$

$x \neq 1 \pm \sqrt{10}$

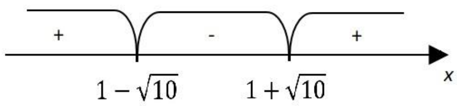
3) Решим третье неравенство системы

$x^2-2x-9 \geq 0$

$x^2-2x-9=0$

Решение квадратного уравнения см. в предыдущем пункте

$$\left(x-\left(1-\sqrt{10}\right)\right)\left(x-\left(1+\sqrt{10}\right)\right)=0$$



$x \in \left(-\infty; 1-\sqrt{10}\right]$, тогда $\left(x-\left(1-\sqrt{10}\right)\right) \geq 0$

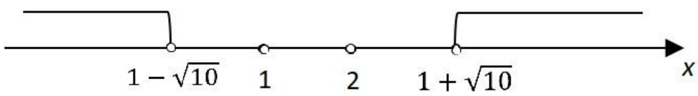
$x \in \left[1-\sqrt{10}; 1+\sqrt{10}\right]$, тогда $(x-\left(1-\sqrt{10}\right))(x-\left(1+\sqrt{10}\right)) \leq 0$

$x \in \left[1+\sqrt{10}; +\infty\right)$, тогда $(x-\left(1-\sqrt{10}\right))(x-\left(1+\sqrt{10}\right)) \geq 0$

Следовательно $x \in \left(-\infty; 1-\sqrt{10}\right] \cup [1+\sqrt{10}; +\infty)$

4) Вернемся к системе неравенств, чтобы найти общее решение

Система имеет вид: $\begin{cases}(x-1)(x-2) \neq 0 \\ x^2-2x-9 \neq 0 \\ x^2-2x-9 \geq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 2 \\ x \neq 1 \pm \sqrt{10} \\ x \in \left(-\infty; 1-\sqrt{10}\right] \cup \left[1+\sqrt{10}; +\infty\right)\end{cases} \Rightarrow$



5) Общее решение: $x \in (-\infty; 1-\sqrt{10}) \cup (1+\sqrt{10}; +\infty) \Rightarrow D_f = \{x \in \left(-\infty; 1-\sqrt{10}\right) \cup \left(1+\sqrt{10}; +\infty\right)\}$

Ответ: $D_f = \{x \in \left(-\infty; 1-\sqrt{10}\right) \cup \left(1+\sqrt{10}; +\infty\right)\}$

Пример 3.

Найти область определения функции

$$f(x) = 4^{x^2+3x-7} + \ln(2x^2+4x+2) - \arccos\left((x+2)(x-5)\right)$$

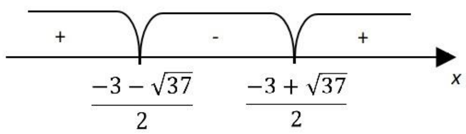
Решение

Составим систему неравенств

$$(1)\begin{cases} x^2+3x-7>0 \\ 2x^2+4x+2>0 \\ -1 \le (x+2)(x-5) \le 1 \end{cases}$$

Решим первое неравенство системы (1)

$$x^2+3x-7>0$$
$$x^2+3x-7=0$$
$$D = b^2-4ac = 3^2-4\times 1\times(-7) = 9+28 = 37$$
$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-3+\sqrt{37}}{2}$$
$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-3-\sqrt{37}}{2}$$
$$\left(x-\left(\frac{-3+\sqrt{37}}{2}\right)\right)\left(x-\left(\frac{-3-\sqrt{37}}{2}\right)\right) = 0$$



$$x \in \left(-\infty; \frac{-3-\sqrt{37}}{2}\right), \text{тогда } \left(x-\left(\frac{-3+\sqrt{37}}{2}\right)\right)\left(x-\left(\frac{-3-\sqrt{37}}{2}\right)\right) \ge 0$$

$$x \in \left(\frac{-3-\sqrt{37}}{2}; \frac{-3+\sqrt{37}}{2}\right), \text{тогда } \left(x-\left(\frac{-3+\sqrt{37}}{2}\right)\right)\left(x-\left(\frac{-3-\sqrt{37}}{2}\right)\right) \le 0$$

$$x \in \left(\frac{-3+\sqrt{37}}{2}; +\infty\right), \text{тогда } \left(x-\left(\frac{-3+\sqrt{37}}{2}\right)\right)\left(x-\left(\frac{-3-\sqrt{37}}{2}\right)\right) \ge 0$$

Следовательно $x \in \left(-\infty; \frac{-3-\sqrt{37}}{2}\right) \cup \left(\frac{-3+\sqrt{37}}{2}; +\infty\right)$

1) Решим второе неравенство системы (1)

$$2x^2+4x-2>0$$

$$2x^2+4x-2=0$$

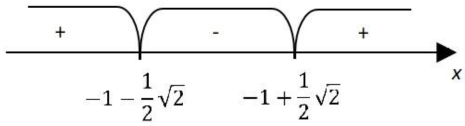
Решим квадратное уравнение

$$D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 16 + 16 + 32$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 + \sqrt{32}}{4} = -1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 - \sqrt{32}}{4} = -1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\left(x - \left(-1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\right)\left(x - \left(-1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\right) = 0$$



$$x \in \left(-\infty; \left(-1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\right), \text{тогда } \left(x - \left(-1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\right)\left(x - \left(-1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\right) \geq 0$$

$$x \in \left(-1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}; -1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right), \text{тогда } \left(x - \left(-1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\right)\left(x - \left(-1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\right) \leq 0$$

$$x \in \left(-1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}; +\infty\right), \text{тогда } \left(x - \left(-1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\right)\left(x - \left(-1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\right) \geq 0$$

Следовательно $x \in \left(-\infty; -1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \cup \left(-1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}; +\infty\right)$

2) Решим третье неравенство системы (1)

$-1 \leq (x+2)(x-5) \leq 1$

Представим неравенство как систему неравенств

$$(2)\begin{cases} (x+2)(x-5) \geq -1 \\ (x+2)(x-5) \leq 1 \end{cases} \begin{cases} x \in \left(-\infty; \frac{3-3\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+3\sqrt{5}}{2}; +\infty\right) \\ x \in \left[\frac{3-\sqrt{53}}{2}; \frac{3+\sqrt{53}}{2}\right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \in \left[\frac{3-3\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{53}}{2}\right]$$

Решим первое неравенство системы (2)

$(x+2)(x-5) \geq -1$

$(x+2)(x-5) + 1 \geq 0$

$x^2 - 5x + 2x - 10 + 1 \geq 0$

$x^2 - 3x - 9 \geq 0$

$x^2 - 3x - 9 = 0$

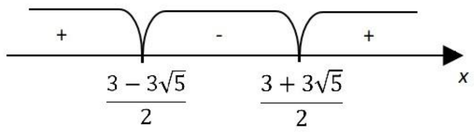
Решим квадратное уравнение

$$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-9) = 9 + 36 = 45$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 + \sqrt{45}}{2} = \frac{3 + 3\sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 - \sqrt{45}}{2} = \frac{3 - 3\sqrt{5}}{2}$$

$$\left(x - \left(\frac{3 - 3\sqrt{5}}{2}\right)\right)\left(x - \left(\frac{3 + 3\sqrt{5}}{2}\right)\right) = 0$$



$$x \in \left(-\infty;\ \frac{3-3\sqrt{5}}{2}\right], \text{тогда} \left(x-\left(\frac{3-3\sqrt{5}}{2}\right)\right)\left(x-\left(\frac{3+3\sqrt{5}}{2}\right)\right) \geq 0$$

$$x \in \left[\frac{3-3\sqrt{5}}{2}; \frac{3+3\sqrt{5}}{2}\right], \text{тогда} \left(x-\left(\frac{3-3\sqrt{5}}{2}\right)\right)\left(x-\left(\frac{3+3\sqrt{5}}{2}\right)\right) \leq 0$$

$$x \in \left[\frac{3+3\sqrt{5}}{2}; +\infty\right), \text{тогда} \left(x-\left(\frac{3-3\sqrt{5}}{2}\right)\right)\left(x-\left(\frac{3+3\sqrt{5}}{2}\right)\right) \geq 0$$

Следовательно $x \in \left(-\infty; \frac{3-3\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+3\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$

Решим второе неравенство системы (2)

$(x+2)(x-5) \leq 1$

$x^2 - 5x + 2x - 10 - 1 \leq 0$

$x^2 - 3x - 11 \leq 0$

$x^2 - 3x - 11 = 0$

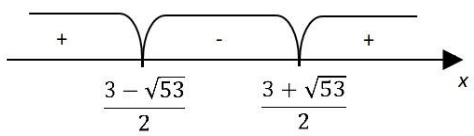
Решим квадратное уравнение

$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-11) = 9 + 44 = 53$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{3+\sqrt{53}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{3-\sqrt{53}}{2}$$

$$\left(x-\left(\frac{3-\sqrt{53}}{2}\right)\right)\left(x-\left(\frac{3+\sqrt{53}}{2}\right)\right) = 0$$



$$x \in \left(-\infty; \frac{3-\sqrt{53}}{2}\right], \text{тогда} \left(x-\left(\frac{3-\sqrt{53}}{2}\right)\right)\left(x-\left(\frac{3+\sqrt{53}}{2}\right)\right) \geq 0$$

$$x \in \left[\frac{3-\sqrt{53}}{2}; \frac{3+\sqrt{53}}{2}\right], \text{тогда} \left(x-\left(\frac{3-\sqrt{53}}{2}\right)\right)\left(x-\left(\frac{3+\sqrt{53}}{2}\right)\right) \leq 0$$

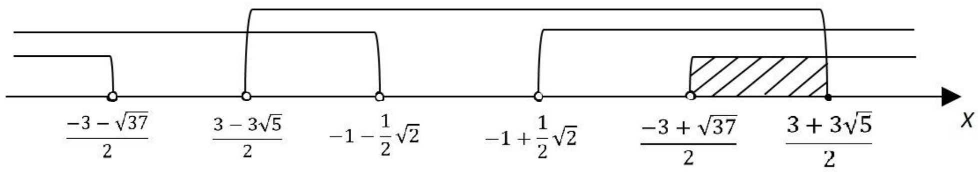
$$x \in \left[\frac{3+\sqrt{53}}{2}; +\infty\right), \text{тогда} \left(x-\left(\frac{3-\sqrt{53}}{2}\right)\right)\left(x-\left(\frac{3+\sqrt{53}}{2}\right)\right) \geq 0$$

Следовательно $x \in \left[\frac{3-\sqrt{53}}{2}; \frac{3+\sqrt{53}}{2}\right]$

3) Вернемся к системе неравенств (1), чтобы найти общее решение

Система (1) имеет вид:

$$\begin{cases} x^2+3x-7>0 \\ 2x^2+4x+2>0 \\ -1 \le (x+2)(x-5) \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; \dfrac{-3-\sqrt{37}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{-3+\sqrt{37}}{2}; +\infty\right) \\ x \in \left(-\infty; -1-\dfrac{1}{2}\sqrt{2}\right) \cup \left(-1+\dfrac{1}{2}\sqrt{2}; +\infty\right) \Rightarrow \\ x \in \left[\dfrac{3-3\sqrt{5}}{2}; \dfrac{3+\sqrt{53}}{2}\right] \end{cases}$$



4) Общее решение: $x \in \left(\frac{-3+\sqrt{37}}{2}; \frac{3+\sqrt{53}}{2}\right]$

Ответ: $D_f = \{x \in \left(\frac{-3+\sqrt{37}}{2}; \frac{3+\sqrt{53}}{2}\right]\}$

Литература

1. Волков, В. А.Элементы теории множеств и развитие понятия числа [Текст] : Учеб. пособие. - Ленинград : Изд-во ЛГУ, 1978. - 83 с.
2. Савушкин А.Ю. Элементы высшей математики. Часть II. Функции, пределы, непрерывность: учебно-методическое пособие / А. Ю. Савушкин, М. П. Харламов. – Волгоград: Изд-во «Михаил», 2010. – 64 с.
3. Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. – М. «Наука», Главная редакция физико-математической литературы/ Лавров И.А., Максимова Л.Л. - 5-е изд., исправл. — М.: Физматлит, 2004. — 256 с.