Монотонные функции

Исмагилова Язиля Фаязовна

студентка факультета иностранных языков

Елабужского Института КФУ

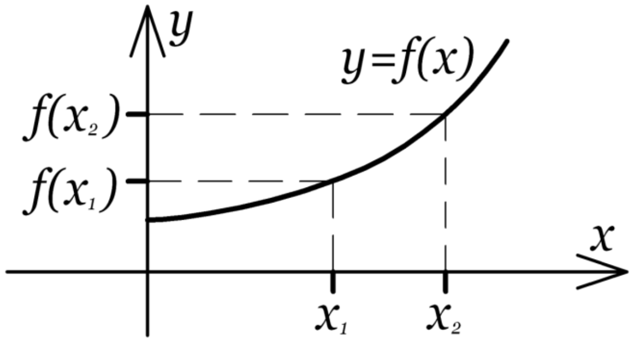
Научный руководитель: Миронова Юлия Николаевна

Монотонные функции – это функции, возрастающие или убывающие на определенном промежутке.

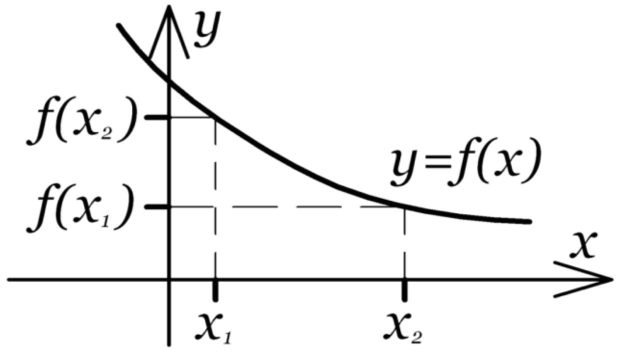
Функция **возрастает**, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Функция **убывает**, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Рассмотрим данные графики.



Мы видим, что при $x_1 < x_2$ $f(x_1) < f(x_2)$. Данные неравенства говорят нам о том, что функция **возрастающая**.



А в вышеприведенной функции мы видим, что при $x_1 < x_2$, $f(x_1) > f(x_2)$. Значит, эта функция **убывающая**.

Исследование функции на возрастание и убывание называют **исследованием функции на монотонность**.

Для исследования функции $f(x)$ на монотонность необходимо:

1) найти ее производную $f'(x)$;
2) найти критические точки функции, приравняв производную данной функции нулю $f'(x) = 0$;
3) определить знак производной на каждом из промежутков, на которые критические точки разбивают область определения функции;
4) определить промежутки возрастания и убывания. На интервалах, где производная функции положительна, функция возрастает, а где отрицательна – убывает.

Рассмотрим примеры.

Пример 1.

Найти: промежутки монотонности функции $f(x) = 3 + 9x^2 - x^3$.

Решение:

1) вычислим производную заданной функции

$$f'(x) = 18x - 3x^2$$

2) найдем критические точки

$$18x - 3x^2 = 0$$

$$3x(6 - x) = 0$$

$$x_1 = 0;\ x_2 = 6$$

3) эти точки разбивают область определения на три интервала, занесем их в таблицу

x	$(-\infty; 0)$	$(0; 6)$	$(6; +\infty)$
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	убывает	возрастает	убывает

Ответ: функция $f(x) = 3 + 9x^2 - x^3$ возрастает на промежутке $(0; 6)$ и убывает на промежутках $(-\infty; 0)$, $(6; +\infty)$.

Пример 2.

Найти: промежутки монотонности функции $y = \frac{x^2+1}{x}$.

Решение: область определения функции $D(y) = \{x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)\}$

1) вычислим производную заданной функции

$$y' = \frac{2x \cdot x - 1 \cdot (x^2 + 1)}{x} = \frac{x^2 - 1}{x}$$

2) найдем критические точки

$$\frac{x^2 - 1}{x} = 0$$

$$\frac{(x + 1)(x - 1)}{x} = 0$$

$$x \neq 0$$

$$x_1 = -1;\ x_2 = 1$$

3) эти точки разбивают область определения на три интервала, занесем их в таблицу

x	$(-\infty; -1)$	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$(1; +\infty)$
y'	-	+	-	+
y	убывает	возрастает	убывает	возрастает

Ответ: функция возрастает на промежутках $(-1; 0)$, $(1; +\infty)$ и убывает на промежутках $(-\infty; -1)$, $(0; 1)$.

Рассмотрим основные **свойства монотонных функций** с примерами.

Свойство 1. Если функция $f(x)$ монотонна на X, то из равенства $x_1 = x_2$ $(x_1, x_2 \in X)$ следует $f(x_1) = f(x_2)$, и наоборот.

Пример: функция $f(x) = \sqrt{x}$ является строго возрастающей при всех $x \in [0; +\infty)$, поэтому из неравенства $\sqrt{x} = \sqrt{4}$ следует $x = 4$.

Свойство 2. Если функция $f(x)$ монотонна на X, то уравнение $f(x) = c$, где с - некоторое число, всегда имеет не более одного решения на X.

Примеры:

a. функция $f(x) = x^2$ является убывающей при всех $x \in (-\infty; 0]$, поэтому уравнение $x^2 = 9$ имеет на этом промежутке не более одного решения, а точнее одно: $x = -3$.

b. функция $f(x) = -\frac{1}{x+1}$ является возрастающей при всех $x \in (-1; +\infty)$, поэтому уравнение $-\frac{1}{x+1} = 0$ имеет на этом промежутке не более одного решения, а точнее ни одного, т.к. числитель левой части никогда не может быть равен нулю.

Свойство 3. Если функция $f(x)$ не убывает (не возрастает) и непрерывна на отрезке $[a; b]$, причем на концах отрезка она принимает значения $f(a) = A$, $f(b) = B$, то при $C \in [A; B]$ $(C \in [B; A])$ уравнение $f(x) = C$ всегда имеет хотя бы одно решение.

Пример: функция $f(x) = x^3$ является возрастающей (то есть монотонной) и непрерывной при всех $x \in R$, поэтому при любом $C \in (-\infty; +\infty)$ уравнение $x^3 = C$ имеет ровно одно решение: $x = \sqrt[3]{C}$.

Таким образом, мы рассмотрели примеры монотонных функций и способы исследования функций на монотонность, что можно использовать на занятиях по математическим дисциплинам в школе и вузе.

Литература

1. В.Ю. Клепко, В.Л. Голец "Высшая математика в примерах и задачах"
2. Электронный ресурс. URL: https://shkolkovo.net/
3. Электронный ресурс. URL: https://mathematics-tests.com/algebra-10-klass-urok-monotonnost-funktsii
4. Электронный ресурс. URL: http://yukhym.com/ru/issledovanie-funktsii/naibolshee-i-naimenshee-znachenie-funktsii-na-otrezke-reshenie-zadach.html

5. Электронный ресурс. URL: http://ru.solverbook.com/spravochnik/issledovanie-funkcii-i-postroenie-ee-grafika/monotonnost-funkcii-vozrastanie-i-ubyvanie/