Аналитические функции

В теории и практике применения функций комплексного переменного интерес представляют дифференцируемые функции, причем имеющие производные не в отдельных точках, а на множествах — в областях. Такие функции называют аналитическими. Имеют место следующие определения:

Определение 1: Однозначная функция комплексной переменной называется аналитической в области, если она дифференцируема в каждой точке этой области.

Определение 2: Однозначная функция комплексной переменной называется аналитической в точке, если она дифференцируема в некоторой окрестности этой точки.

Определение 3: Функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ называется аналитической в области D, если ее действительная и мнимая части дифференцируемы в D и в каждой точке области D выполняется условие Коши-Римана: $\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy}$, $\frac{dv}{dx} = -\frac{du}{dy}$.

Определение 4: Функция, имеющая непрерывные частные производные второго порядка и удовлетворяющая уравнению Лапласа, называется гармонической функцией

Сущность аналитической функции поясним на примерах.

Пример 1. Дана функция $v(x,y) = 2x - 3y$. Восстановить соответствующую аналитическую функцию.

Решение:

Имеем $\frac{dv}{dx} = 2$; $\frac{dv}{dy} = -3$; $\frac{d^2v}{dx^2} = 0$; $\frac{d^2v}{dx^2} = 0$. Убеждаемся, что функция $v(x,y)$-гармоническая. Найдем функцию $\mathrm{u(x,y)}$. Вычисляем

$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} = -3 = \mathrm{P}(x,y)$;

$\frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx} = -2 = Q(x,y)$.

Так как $du = Pdx + Qdy$, тогда $du = -3dx - 2dy$;

$u(x, y) = -\int_{(0,0)}^{(x,y)} 3dx + 2dy + C = -\int_0^x 3dx - \int_0^y 2dy + C = -3x - 2y + C$.

Окончательно получаем

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = (-3x - 2y + C) + i(2x - 3y)$.

Пример 2. Исследовать функцию $w = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^2 - 1)$ на аналитичность и найти производную функции.

Решение:

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2$$

$$v(x, y) = 3x^2y - y^2 - 1$$

$\frac{du}{dx} = 3x^2 - 3y^2$, $\qquad \frac{du}{dy} = -6xy$

$\frac{dv}{dx} = 6xy$, $\qquad \frac{dv}{dy} = 3x^2 - 3y^2$

Запишем условия Коши-Римана:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y^2 = 3x^2 - 3y^2 \\ 6xy = 6xy \end{cases}$$

Они выполняются во всей комплексной плоскости, значит, наша функция аналитична во всей комплексной плоскости.

Вычислим производную:

$$w' = 3x^2 - 3y^2 + 6xy^2$$

Пример 3. Исследовать функцию $w = e^x(\cos y + i \sin y)$ на аналитичность и найти её производную.

Решение:

$$u(x, y) = e^x \cos y$$

$$v(x, y) = e^x \sin y$$

$\frac{du}{dx} = e^x \cos y$, $\qquad \frac{du}{dy} = -e^x \sin y$

$\frac{dv}{dx} = e^x \sin y$, $\qquad \frac{dv}{dy} = e^x \cos y$

Запишем условия Коши-Римана:

$$\begin{cases} e^x \cos y = e^x \cos y \\ e^x \sin y = e^x \sin y \end{cases}$$

Они выполняются во всей комплексной плоскости, значит, наша функция аналитична во всей комплексной плоскости.

Вычислим производную:

$$w' = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x(\cos y + i \sin y) = w$$

Таким образом, мы рассмотрели понятие аналитической функции, а также примеры, которые помогут студентам более подробно разобраться в этой теме.

Список литературы:

1. А.Н. Миронов, Ю.Н. Миронова. Теория функций комплексной переменной. Елабуга, 2007 год
2. И.М. Уваренков, М.З. Маллер. Курс математического анализа. Москва, 1966 год.
3. Н.П. Миронов, Л.Б. Миронова. Задачник-практикум по теории функций комплексной переменной, Часть 1. Елабуга, 2008 год
4. Н.А. Давыдов, П.П. Коровкин, В.Н. Никольский. Сборник задач по математическому анализу. Москва, 1973 год