Устойчивость по 1-му приближению

Теорема 1. Если в системе $\frac{\partial x_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + R_i(t, x_1, \dots, x_n), \;\; i = \overline{1,n}$

(1)

коэффициенты a_{ij} постоянны, а все функции R_i в достаточно малой окрестности координат $t \geq t_0$ удовлетворяет неравенствам $R_i \leq N\|x\|^{1+\alpha}$, где N и α = «+» const > 0 и все корни характеристического уравнения имеют отрицательные действительные части

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn-k} \end{vmatrix} = 0 \quad (2)$$

То нулевые решения систем (1) и $\frac{\partial x_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j, \; i = \overline{1,n}$ (3)

асимптотически устойчивы. В этом случае возможно исследование по первому приближению.

Теорема 2. Если все a_{ij} const функции R_i удовлетворяют условиям системы $\frac{\partial x_i}{\partial t} = f_i(t, x_1, \dots, x_n), \;\; i = \overline{1,n}$ и хотя бы один корень имеет положительную действительную часть, то точки покоя $x_i = 0(i = \overline{1,n})$ систем (1) и (3) неустойчивы. В этом случае точки, возможно, исследовать по первому приближению.

Сущность устойчивости по первому приближению поясним на примерах.

Пример 1. Исследовать на устойчивость по первому приближению точку покоя $x = y = 0$ системы

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = 7x + 2\sin y - y^4 \\ \frac{\partial y}{\partial t} = e^x - 3y - 1 - \frac{5}{2}x^2 \end{cases} \quad (4)$$

Решение:

По формуле Тейлора записываем: $\begin{matrix} e^x = 1 + x + 0(x) \\ \sin y = y + 0(y^2) \end{matrix}$ (5)

Система первого приближения: $\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = 7x + 2y \\ \frac{\partial y}{\partial t} = x - 3y \end{cases}$ (6)

Нелинейные члены удовлетворяют нужным условиям. Составим характеристическое уравнение для системы (7)

$\begin{vmatrix} 7-k & 2 \\ 1 & -3-k \end{vmatrix} = -21 - 7k + 3k + k^2 - 2 = k^2 - 4k - 23 = 0$ (8)

Корни характеристического уравнения (7) $k_{1,2} = 2 \pm 3\sqrt{3}$, вещественные и $k_1 > 0$. Следовательно, нулевое решение *x=y=0* системы (4) неустойчиво.

Пример 2. Исследовать на устойчивость по первому приближению точку покоя $x = y = 0$ системы

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{1}{4}(e^x - 1) - 9y + x^4 \\ \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{5}x - \sin y + y^{14} \end{cases}$$

Решение:

По формуле Тейлора записываем: $\begin{matrix} e^x = 1 + x + 0(x) \\ \sin y = y + 0(y^2) \end{matrix}$

Система первого приближения: $\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{1}{4}x - 9y \\ \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{5}x - y \end{cases}$

Нелинейные члены удовлетворяют нужным условиям. Составим характеристическое уравнение для системы:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{4} - k & -9 \\ \frac{1}{5} & -1-k \end{vmatrix} = k^2 + \frac{3k}{4} + \frac{31}{20} = 0$$

$$20k^2 + 15k + 31 = 0$$

$$D=225-2480 < 0$$

Следовательно, точка покоя асимптотически устойчива

Пример 3. Исследовать на устойчивость по первому приближению точку покоя $x = y = 0$ системы

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = 5x + y\cos y - \frac{x^3}{3} \\ \frac{\partial y}{\partial t} = 3x + 2y + \frac{x^4}{12} - y^3 e^4 \end{cases}$$

Решение:

По формуле Тейлора записываем: $\sin y = y + 0(y^2)$

Система первого приближения: $\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = 5x + y \\ \frac{\partial y}{\partial t} = 3x + 2y \end{cases}$

Нелинейные члены удовлетворяют нужным условиям. Составим характеристическое уравнение для системы:

$$\begin{vmatrix} 5-k & 1 \\ 3 & 2-k \end{vmatrix} = 10 - 5k - 2k + k^2 - 3 = k^2 - 7k + 7 = 0$$

Корни характеристического уравнения $k_{1,2} = \frac{7+\sqrt{21}}{2}$. Следовательно, точка покоя неустойчива.