Второй метод Ляпунова

Второй (прямой) метод Ляпунова основывается на построении специальных функций Ляпунова, позволяющих получить достаточные условия устойчивости равновесия в большом. В его основе лежат две теоремы Ляпунова, приводимые ниже без доказательства.

Рассмотрим систему $\frac{\partial x_i}{\partial t} = x_i(x_1, \dots, x_n), i = \overline{1, n}$ (1)

Теорема 1. Если для системы (1) ∃ функция *V* имеющая знакоопределенную производную в силу системы (1) такая, что сама *V* не является знакопостоянной, знака противоположного с $\frac{\partial v}{\partial t}$, то нулевое решение системы неустойчиво.

Теорема 2. Пусть ∃ диф. функция *V* удовлетворяющая в некоторой *h* окрестности начала координат.

1) Как угодно малой окрестности *U* начала координат ∃ область *G* в которой *V >0,* причем *V=0* на лежащей в *U* части границы *G*.

2) В области *G* проиводная в силу системы $\frac{\partial v}{\partial t} > 0$, причем в области $V \geq \alpha > 0$ будет $\frac{\partial v}{\partial t} \geq \beta > 0$, тогда нулевое решение системы (1) неустойчиво.

Сущность второго метода Ляпунова поясним на примерах.

Пример 1. Исследовать на устойчивость $\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = -x - 2y + x^2y^2 \\ \frac{\partial y}{\partial t} = x - \frac{y}{2} - \frac{x^3y}{2} \end{cases}$

Решение: Функция $\mathrm{V} = \mathrm{a}x^2 + by^2$ удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова об устойчивости:

1) $\mathrm{V}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \geq 0, \mathrm{V}(0,0) = 0$

2) $\frac{\partial v}{\partial t} = 2ax(-x-2y+x^2y^2) + 2by\left(x - \frac{y}{2} - \frac{x^3y}{2}\right) = -2ax^2 - 4axy + 2ax^3y^2 + 2bxy - by^2 - bx^3y^2 = -2ax^2 - by^2 + 2xy(-2a+b) + x^3y^2(2a-b)$

пусть a =1, b =2, тогда V $= x^2 + 2y^2 > 0$

$$\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t} = -2x^2 - 2y^2 = -2(x^2+y^2) < 0$$

Следовательно, точка покоя асимптотически устойчива

Пример 2. Исследовать на устойчивость $\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = -2y - x(x-y)^2 \\ \frac{\partial y}{\partial t} = 3x - \frac{3}{2}y(x-y)^2 \end{cases}$

Решение: Функция $\mathrm{V} = \mathrm{a}x^2 + by^2$ удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова об устойчивости:

1) $\mathrm{V(x,y)} \geq 0, \mathrm{V}(0{,}0) = 0$

2) $\frac{\partial v}{\partial t} = 2ax(-2y - x(x-y)^2) + 2by\left(3x - \frac{3}{2}y(x-y)^2\right) = -4axy - 2ax^2(x-y)^2 + 6bxy - 3by^2(x-y)^2 = -2ax^2(x-y)^2 - 3by^2(x-y)^2 - 2xy(2a-3b)$

пусть a =3, b =2, тогда V $= 3x^2 + 2y^2 > 0$

$$\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t} = -6x^2(x-y)^2 - 6y^2(x-y)^2 = -6(x-y)^2 \cdot (x^2+y^2) \leq 0$$

Следовательно, точка покоя устойчива

Пример 3. Исследовать на устойчивость $\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = y + x^3 \\ \frac{\partial y}{\partial t} = -x + y^3 \end{cases}$

Решение: Функция $\mathrm{V} = \mathrm{a}x^2 + by^2$ удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова об устойчивости:

1) $\mathrm{V(x,y)} \geq 0, \mathrm{V}(0{,}0) = 0$

2) $\frac{\partial v}{\partial t} = 2ax(y + x^3) + 2by(-x + y^3) = 2axy + 2ax^4 - 2bxy + 2by^4 = 2ax^4 + 2by^4 + 2xy(a - b)$

пусть a =3, b =2, тогда $\mathrm{V} = 3x^2 + 2y^2 > 0$

$$\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t} = 2x^4 + 2y^4 - 2(x^4 + y^4) > 0$$

Следовательно, точка покоя неустойчива

Пример 4. Исследовать на устойчивость $\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = -xy^4 \\ \frac{\partial y}{\partial t} = -x^4 y \end{cases}$

Решение: Функция $\mathrm{V} = \mathrm{a}x^4 + by^4$ удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова об устойчивости:

1) $\mathrm{V(x, y)} \geq 0, \mathrm{V}(0,0) = 0$

2) $\frac{\partial v}{\partial t} = 4ax^3(-xy^4) + 4by^3(x^4 y) = -4ax^4y^4 + 4by^4x^4 = -4x^4y^4(a - b)$

пусть a =1, b =1, тогда $\mathrm{V} = x^4 + y^4 > 0$

$$\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t} = 0$$

Следовательно, точка покоя устойчива