Простейшие типы точек покоя

Пусть имеем систему двух линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{\partial y}{\partial t} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \quad (1)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

Точка, в которой правые части уравнений системы (1) обращаются в ноль, называется *точкой покоя системы* (1).

Для исследования точки покоя системы (1) надо составить характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} = 0 \quad (2)$$, и найти его корни k_1 и k_2.

Рассмотрим возможные случаи:

1. Корни характеристического уравнения k_1 и k_2 действительные и различные. Общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} x = c_1\alpha_1 \mathrm{e}^{k_1 t} + c_2\alpha_2 \mathrm{e}^{k_2 t} \\ y = c_1\beta_1 \mathrm{e}^{k_1 t} + c_2\beta_2 \mathrm{e}^{k_2 t} \end{cases}$$

1) $k_1 < 0,\ k_2 < 0$. Точка покоя асимптотически устойчива и называется *устойчивым узлом*.

2) $k_1 > 0,\ k_2 > 0$. Точка покоя неустойчива и называется *неустойчивым узлом*.

3) $k_1 > 0,\ k_2 < 0$. Точка покоя неустойчива и называется *седлом*.

2. Корни характеристического уравнения комплексные:

$$k_{1,2} = p \pm iq, q \neq 0$$

Общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} x = \mathrm{e}^{pt}(c_1 \cdot \cos qt + c_2 \sin qt) \\ y = \mathrm{e}^{pt}(\bar{c_1} \cos qt + \bar{c_2} \sin qt) \end{cases}$$

1) p=0, т.е. $k_{1,2} = \pm iq$. Точка покоя устойчива и называется *центром*.

2) $p < 0, q \neq 0$. Точка покоя асимптотически устойчива и называется *устойчивым фокусом*.

3) $p > 0, q \neq 0$. Точка покоя неустойчива и называется *неустойчивым фокусом*.

3. Корни характеристического уравнения кратные: $k_1 = k_2$

Общее решение системы имеет вид: $\begin{cases} x = (x_1 + \alpha_2 t)\mathrm{e}^{k_1 t} \\ y = (\beta_1 + \beta_2 t)\mathrm{e}^{k_1 t} \end{cases}$

1) $k_1 < 0$. Точка покоя асимптотически устойчива и называется *устойчивым узлом*.

2) $k_1 > 0$. Точка покоя неустойчива и называется *неустойчивым узлом*.

Сущность простейших типов точек покоя поясним на примерах.

Пример 1. Определить характер точки покоя (0,0) системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial y} = x - y \\ \dfrac{\partial y}{\partial t} = 2x + 3y \end{cases}$$

Решение: Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-k & -1 \\ 2 & 3-k \end{vmatrix} = k^2 - 4k + 3 + 2 = k^2 - 4k + 5 = 0$$

Корень $k_1 = 2 + i > 0$. Следовательно, точка покоя (0;0)-неустойчивый фокус.

Пример 2. Определить характер точки покоя (0,0) системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t} = 5x - y \\ \dfrac{\partial y}{\partial t} = 2x + y \end{cases}$$

Решение: Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 5-k & -1 \\ 2 & 1-k \end{vmatrix} = (5-k)\cdot(1-k) + 2 = k^2 - 6k + 7 = 0$$

Его корни $k_{1,2} = 3 + \sqrt{2} > 0$ вещественные, положительные. Следовательно, точка покоя (0;0)-неустойчивый узел.

<u>*Пример 3.*</u> Определить характер точки покоя (0,0) системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t} = -x + ay \\ \dfrac{\partial y}{\partial t} = -2y \end{cases}$$

Решение: Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -1-k & a \\ 0 & -2-k \end{vmatrix} = k^2 + 3k + 2 = 0$$

Его корни $k_1 = -1$, $k_2 = -2$ отрицательны. Следовательно, точка покоя (0;0)-устойчивый узел.

<u>*Пример 4.*</u> Определить характер точки покоя (0,0) системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t} = x + 2y \\ \dfrac{\partial y}{\partial t} = 2x + 3y \end{cases}$$

Решение: Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-k & 2 \\ 2 & 3-k \end{vmatrix} = k^2 - 4k - 1 = 0$$

Его корни $k_1 = 2 + \sqrt{5} > 0$, $k_2 = 2 - \sqrt{5} < 0$. Следовательно, точка покоя (0;0)-седло.