СВОЙСТВА ВЕКТОРОВ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

Файзуллин Р.К.,

Шумилова А.М.,

Студенты факультета ИТФ

Елабужского института КФУ

Научный руководитель – Миронова Ю.Н.

В геометрии вектор — направленный отрезок прямой, то есть отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек является началом, а какая — концом

Основные понятия

Вектор с началом в точке и концом в точке принято обозначатькак $\overrightarrow{AB}$. Векторы также могут обозначаться малыми латинскими буквами со стрелкой (иногда — чёрточкой) над ними, например, $\vec{a}$. Другой распространённый способ записи: выделение символа вектора жирным шрифтом**: a.**

Вектор в геометрии естественно сопоставляется переносу (параллельному переносу), что, очевидно, проясняет происхождение его названия (лат. *vector*, *несущий*). Действительно, каждый направленный отрезок однозначно определяет собой какой-то параллельный перенос плоскости или пространства: скажем, вектор естественно определяет перенос, при котором точка перейдет в точку , также и обратно, параллельный перенос, при котором **A** переходит в **B**, определяет собой единственный направленный отрезок (единственный — если считать равными все направленные отрезки одинакового направления и длины — то есть рассматривать их как свободные векторы; действительно, при параллельном переносе все точки смещаются в одинаковом направлении на одинаковое расстояние, так что в таком понимании).

Интерпретация вектора как переноса позволяет естественным и интуитивно очевидным способом ввести операцию сложения векторов — как композиции (последовательного применения) двух (или нескольких) переносов; то же касается и операции умножения вектора на число.

Виды векторов

Иногда вместо того, чтобы рассматривать в качестве векторов множество всех направленных отрезков (рассматривая как различные все направленные отрезки, начала и концы которых не совпадают), берут только некоторую модификацию этого множества (фактор-множество), то есть, некоторые направленные отрезки рассматривают как равные, если они имеют одинаковое направление и длину, хотя они могут иметь разное начало (и конец), то есть направленные отрезки одинаковой длины и направления считаются представляющими один и тот же вектор; таким образом, каждому вектору оказывается соответствующим целый класс направленных отрезков, одинаковых по длине и направлению, но различающихся началом (и концом).

Так, говорят о «свободных», «скользящих» и «фиксированных» векторах. Эти виды отличаются понятием равенства двух векторов.

Говоря о свободных векторах, отождествляют любые векторы, имеющие одинаковое направление и длину;

говоря о скользящих векторах — добавляют, что начала равных скользящих векторов должны совпадать или лежать на одной прямой, на которой лежат изображающие эти векторы направленные отрезки (так что один может быть совмещен с другим перемещением в направлении, им же самим задаваемом);

говоря о фиксированных векторах — говорят, что равными считаются только векторы, у которых совпадают и направления, и начала (то есть в этом случае факторизации нет: нет двух фиксированных векторов с различными началами, которые считались бы равными).

<u>Операции над векторами</u>

<u>Модуль вектора</u>

Модулем вектора $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ называется число, равное длине отрезка AB. Обозначается, как$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$. Через координаты вычисляется, как:

$$|\vec{\mathrm{a}}| = \sqrt{\mathrm{a}_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Сложение векторов

В координатном представлении вектор суммы получается суммированием соответствующих координат слагаемых:

$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$

Для геометрического построения вектора суммы $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ используют различные правила (методы), однако они все дают одинаковый результат. Использование того или иного правила обосновывается решаемой задачей.

<u>Пример</u>

Задание: Найти сумму векторов $\vec{a} = (-3; 2; 2)$, $\vec{b} = (1;-4;-3)$

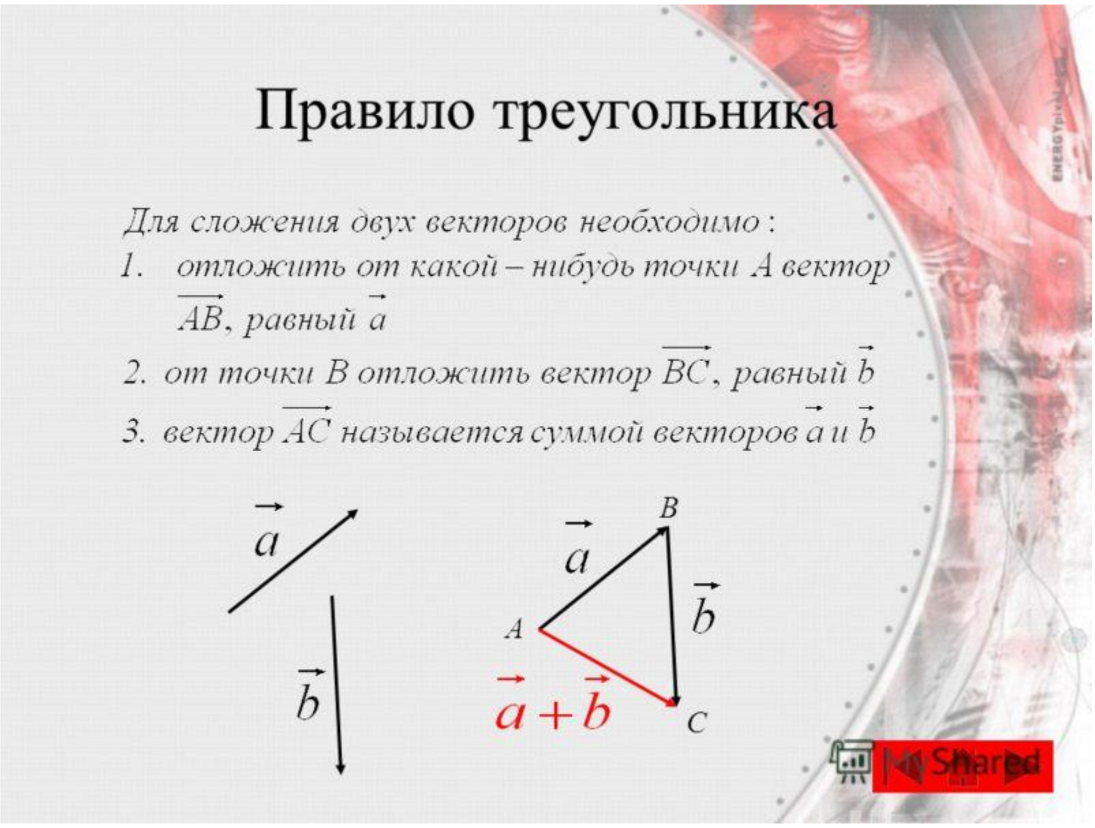
Решение: Чтобы найти сумму указанных векторов к координатам вектора $\vec{a}$ прибавим соответствующие координаты вектора $\vec{b}$:

$$\vec{a} + \vec{b} = \left(-3 + 1; 2 + (-4); 2 + (-3)\right) = (-2; -2; -1)$$

Ответ: $(-2; -2; -1)$.

Правило треугольника

Правило треугольника наиболее естественно следует из понимания вектора как переноса. Ясно, что результат последовательного применения двух переносов $\vec{a}, \vec{b}$ некоторой точки будет тем же, что применение сразу одного переноса $\vec{a}+\vec{b}$, соответствующего этому правилу. Для сложения двух векторов $\vec{a},\vec{b}$ по правилу треугольника оба эти вектора переносятся параллельно самим себе так, чтобы начало одного из них совпадало с концом другого. Тогда вектор суммы задаётся третьей стороной образовавшегося треугольника, причём его начало совпадает с началом первого вектора, а конец с концом второго вектора.



Правило многоугольника

Начало второго вектора совмещается с концом первого, начало третьего — с концом второго и так далее, сумма же n векторов есть вектор, с началом, совпадающим с началом первого, и концом, совпадающим с концом n-го (то есть изображается направленным отрезком, замыкающим ломаную). Так же называется правилом ломаной.

Правило параллелограмма

Для сложения двух векторов $\vec{a}, \vec{b}$ по правилу параллелограмма оба эти векторы переносятся параллельно самим себе так, чтобы их начала совпадали. Тогда вектор суммы задаётся диагональю построенного на них параллелограмма, исходящей из их общего начала. (Легко видеть, что эта диагональ совпадает с третьей стороной треугольника при использовании правила треугольника).

Правило параллелограмма особенно удобно, когда есть потребность изобразить вектор суммы сразу же приложенным к той же точке, к которой приложены оба слагаемых — то есть изобразить все три вектора имеющими общее начало.

Модуль суммы векторов

Модуль суммы двух векторов можно вычислить, используя теорему косинусов:

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$$

где $\cos(\vec{a},\vec{b})$ −косинус угла между векторами $\vec{a},\vec{b}$

Если векторы изображены в соответствии с правилом треугольника и берется угол по рисунку — между сторонами треугольника — что не совпадает с обычным определением угла между векторами, а значит и с углом в приведенной формуле, то последний член приобретает знак минус, что соответствует теореме косинусов в её прямой формулировке.

Для суммы произвольного количества векторов применима аналогичная формула, в которой членов с косинусом больше: по одному такому члену существует для каждой пары векторов из суммируемого набора. Например, для трех векторов формула выглядит так:

$$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b}) + 2|\vec{a}||\vec{c}|\cos(|\vec{a},||\vec{c},|) + 2|\vec{c}||\vec{b}|\cos(|\vec{c},||\vec{b},|)$$

Пример

Задание: Найти сумму векторов $\vec{a} = (-1; 0; 2)$, $\vec{b} = (1; -3; 1)$

Решение: Суммой заданных векторов будет вектор, координаты которого равны сумме соответствующих координат векторов и :

$$\vec{a} + \vec{b} = (-1 + 1; 0 + (-3); 2 + 1) = (0; -3; 3)$$

Ответ: $\vec{a} + \vec{b} = (0; -3; 3)$

Вычитание векторов

Для получения разности в координатной форме надо вычесть соответствующие координаты векторов:

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z)$$

Для получения вектора разности $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ начала векторов соединяются и началом вектора $\vec{c}$ будет конец $\vec{b}$, а концом — конец $\vec{a}$. Если записать, используя точки векторов, то $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

Пример

Задание: Найти вектор $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, если $\vec{a} = (2; -1)$, $\vec{b} = (0; 2)$ и

Решение: Вначале найдем координаты векторов $2\vec{a}$ и $3\vec{b}$. Для этого умножим каждую координату векторов и на два и три соответственно:

$2\vec{a} = 2 \cdot (2; -1)$=(2·2;2·(-1))=(4;-2)0

$$3\vec{b} = 3 \cdot (0; 2) = (3 \cdot 0; 3 \cdot 2) = (0; 6)$$

Тогда искомый вектор

$$\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b} = (4 - 0; -2 - 6) = (4; -8)$$

Ответ: $\vec{c} = (4; -8)$

Модуль разности векторов.

Три вектора $\vec{a}, \overrightarrow{b}$; $\vec{a}-\vec{b}$ как и при сложении, образуют треугольник, и выражение для модуля разности получается аналогичным:

$$|\vec{a}-\vec{c}|^2=|\vec{a}|^2-\left|\vec{b}\right|^2-|\vec{c}|^2-2|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$$

где $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$— косинус угла между векторами$\vec{a},\vec{b}$

Отличие от формулы модуля суммы в знаке перед косинусом, при этом надо хорошо следить, какой именно угол берется (вариант формулы модуля суммы с углом между сторонами треугольника при суммировании по правилу треугольника по виду не отличается от данной формулы для модуля разности, но надо иметь в виду, что тут берутся разные углы: в случае суммы берётся угол, когда вектор $\vec{b}$ переносится к концу вектора $\vec{a}$, когда же ищется модуль разности, берётся угол между векторами, приложенными к одной точке; выражение для модуля суммы с использованием того же угла, что в данном выражении для модуля разности, отличается знаком перед косинусом).

Пример Найти разность векторов$\vec{a}=(1;-7)$, $\overrightarrow{b}=(-1;-2)$

Решение: Чтобы найти вектор-разность необходимо от координат вектора отнять соответствующие координаты вектора, то есть

$$\vec{a}-\vec{b}=(1-(-1);\ -7-2)=(2;-9)$$

Ответт: $\vec{a}-\vec{b}=(2;-9)$

Умножение вектора на число

Умножение вектора $\vec{a}$ на число α>0 даёт сонаправленный вектор с длиной в α раз больше.

Умножение вектора $\vec{a}$ на число α<0 даёт противоположно направленный вектор с длиной в αраз больше.

Умножение вектора на число в координатной форме производится умножением всех координат на это число:

$$\alpha\vec{a}=(\alpha a_x,\alpha a_y,\alpha a_y)$$

Исходя из определения получается выражение для модуля вектора, умноженного на число:

$$|\alpha\vec{a}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$$

Аналогично как и числами, операции сложение вектора с самим с собой можно записать через умножение на число:

$$\vec{a} + \vec{a} = 2\vec{a}$$

А вычитание векторов можно переписать через сложение и умножение:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

Исходя из того, что умножение на -1 не меняет длины вектора, а меняет только направление и учитывая определение вектора, получаем:

$$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$$

Пример

Задание: Найти произведение вектора $\vec{c} = (-1; 2; 3)$ на число 2.

Решение: Согласно определению, чтобы умножить заданный вектор на число , необходимо каждую координату вектора умножить на это число, то есть

$$2\vec{c} = 2 \cdot (-1; 2; 3) = (2 \cdot (-1); 2 \cdot 2; 2 \cdot 3) = (-2; 4; 6)$$

Ответ $2\vec{c} = (-2; 4; 6)$

Список литературы

1. Фролов С.В., Шостак Р.Я. Курс высшей математики.–М.: Высшая школа, 1973.

2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.I,II.–М.: Наука, 1966.

3.Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа.–М.: Физматлит, 2003

4. Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике.–М.: Айрис Пресс, 2006.

5. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики. –М.: Наука, 1968.