ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛА

Мухаммедов Енгиш

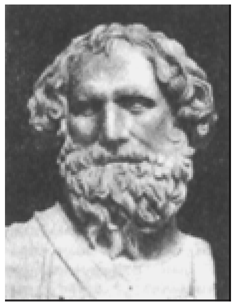
Шумилова Анна

студенты факультета ИТФ

Елабужского института КФУ

Научный руководитель - Миронова Ю.Н.

Впервые интегральный метод исчисления зародился в трудах древнегреческого ученого Архимеда, но четкое математическое оформление интегральное исчисление смогло получить лишь тогда, когда было открыто немецким ученым Г. Лейбницом и английским ученым И. Ньютоном.



Архимед

Интеграл(от лат. integer — целый), одно из важнейших понятий математики. Оно возникло в связи с потребностью, с одной стороны, отыскивать функции по их производным. *Например*, находить функцию, выражающую путь, пройденный движущейся точкой, по скорости этой точки. А с другой — измерять площади, объёмы, длины дуг, работу сил за определённый промежуток времени и т. п. В соответствии с этим различают неопределённые и определённые интегралы, вычисление которых является задачей ***интегрального исчисления.***

Интеграл функции одной переменной

Неопределённый интегра́л для функции f(x) — это совокупность всех *первообразных* данной функции.

Если функция f(x) определена и непрерывна на промежутке (a,b) и F(x) — её первообразная, то есть $F'(x) = f(x)$ при $a<x<b$, то $\int f(x)dx= F(x)+C$, $a<x<b$, где C — произвольная постоянная.

$d(\int f(x)dx)=f(x)dx$

$\int d(F(x))=F(x)+C$

$\int a \bullet f(x)dx=a \bullet \int f(x)dx$

$\int (f(x)\pm g(x))dx=\int f(x)dx\pm \int g(x)dx$

Если $\int f(x)dx=F(x)+C$, тои $\int f(u)du=F(u)+C$, где $u=\varphi(x)$ — произвольная функция, имеющая непрерывную производную.

Таблица неопределённых интегралов

1. $\int 0\cdot dx=C$;

2. $\int 1\cdot dx = x + C$;

3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C (n \neq -1)$;

4. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$;

5. $\int e^x dx = e^x + C$;

6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (a>0, a\neq 1)$;

7. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$;

8. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$;

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg x + C$;

10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg + C$;

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + \acute{c}$ $(\acute{C} = \frac{\Pi}{2} + C)$;

12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg x + C$;

13. $\int ch x dx = sh x + C$;

14. $\int sh x dx = ch x + C$;

Первообразная функция.

Определение: Функция F(x) называется **первообразной функцией** функции f(x) на отрезке [a, b], если в любой точке этого отрезка верно равенство:

$\acute{F}(x) = f(x)$.

Надо отметить, что первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число.

$F_1(x) = F_2(x) + C$.

Интегрирование путем подведения функции под знак дифференциала.

Этот прием интегрирования очень удобен. Суть его та же, что и в методе замены переменной, но ввиду чрезвычайной важности умения подводить различные функции под знак дифференциала при интегрировании многих классов функций этот прием выделен нами в отдельный пункт. Базируется он на свойстве инвариантности формы записи интеграла и является одним из наиболее распространенных приемов; позволяет во многих случаях легко привести интеграл к табличному виду. Идея приема состоит в том, что некоторым преобразованиям подвергается дифференциал. Напомним формулу для вычисления дифференциала функции φ(x):

$$d\varphi(x) = \varphi'(x)\, dx. \qquad (2)$$

Если в подынтегральном выражении имеется множитель, являющийся производной какой-либо функции (или ее частью с точностью до коэффициентов, на которые можно домножить и разделить все выражение), то умноженный на dx, он представляет собой дифференциал этой функции. Функцию записывают после знака дифференциала d, т.е. формулу (2) применяют справа налево, и говорят, что функция внесена (или подведена) под знак дифференциала. Шутка: предлог «под» не означает, что функцию опускают ниже знака дифференциала. Отметим, что $d(x + a) = dx$, $d(ax) = adx$, где a – любая константа; т.е. прибавление или вычитание константы под знаком дифференциала не меняет дифференциала, так как дифференциал константы равен нулю, постоянный множитель можно как вносить под знак дифференциала, так и выносить за его знак.

Метод непосредственного интегрирования

Интегрирование, основанное на прямом использовании таблицы интегралов и свойств неопределенного интеграла, называется *непосредственным интегрированием*.При непосредственном интегрировании могут представиться три случая.

I. Интеграл находят непосредственно по соответствующему табличному интегралу.

Примеры

1) $\int x^3\, dx = \frac{x^4}{4} + C;$

2) $\int \cos x\, dx = sinx + C$;

II. Интеграл приводится к одному или нескольким табличным интегралам в результате применения свойств неопределенного интеграла.

Примеры

1. $\int \frac{2}{x} - \frac{sinx}{3} + \frac{6}{1+x^2} dx = 2\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{3}\int sinxdx + 6\int \frac{dx}{1+x^2} = 2\ln|x| + \frac{1}{3}cosx +$
$+6arctgx + C;$

2. $\int \frac{1}{x^2} + \frac{1}{5cos^2\ x} - 4dx = \int \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{5}\int \frac{dx}{cos^2 x} - 4\int dx = -\frac{1}{x} + tgx - 4x + \mathrm{C}.$

III. Интеграл приводится к одному или нескольким табличным интегралам в результате элементарных тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств неопределенного интеграла.

Примеры

1. $\int \frac{3x^4+2x^2-3x+7}{x^2} dx = 3\int x^2 dx + 2\int dx - 3\int \frac{dx}{x} + 7\int \frac{dx}{x^2} = 3\frac{x^3}{3} + 2x - 3\ln|x| - 7\frac{1}{x} = x^3 + 2x - 3\ln|x| - \frac{7}{x} + \mathrm{C};$

2. $\int 2^{3x \cdot 3^x}\ dx = \int (2^3 \cdot 3)^x dx = \int 24^x dx = \frac{24}{\ln 24}^{x} + \mathrm{C};$

Метод интегрирования подстановкой (замена переменной)

Сущность метода заключается в том, что путем введения новой переменной интегрирования (т.е. подстановки) удается свести заданный интеграл к новому интегралу, который является табличным или легко находится другим способом. Общих методов подбора подстановок не существует. Рассмотрим некоторые варианты подстановок.

Линейные подстановки

При сведении данного интеграла к табличному часто используются преобразования дифференциала (операция «подведения под знак дифференциала»).

I. Под знак дифференциала, стоящего в интеграле, можно ввести любое постоянное слагаемое.

При любой постоянной a будет

$$d(x+a) = dx.$$

Поэтому

$$\int f(x)dx = \int f(x)d(x+a).$$

Примеры

1. $\int (x-5)^4\ dx = \int (x-5)^4 d(x-5) = \frac{(x-5)^5}{5} + \mathrm{C};$

2. $\int \sin(x-2)\ dx = \int \sin(x-2)\ d(x-2) = -\cos(x-2) + \mathrm{C};$

3. $\int e^{x+2}dx = \int e^{x+2}d(x+2) = e^{x+2} + С.$

II. Под знак дифференциала, стоящего в интеграле, можно ввести любой постоянный множитель, разделив на него интеграл.

Известно, если a − постоянно, то

$$d(ax) = adx.$$

Тогда

$$dx=\frac{1}{a}d(ax).$$

Поэтому

$$\int f(x)dx = \frac{1}{a}\int f(x)d(ax).$$

Примеры

1. $\int \cos 3xdx = \frac{1}{3}\int \cos 3x\, d(3x) = \frac{1}{3}\sin 3x + С;$

2. $\int \frac{dx}{cos^2 2x} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x)}{cos^2 2x} = \frac{1}{2}tg2x + С.$

В некоторых случаях применяют оба приема вместе:

$$\int(ax \pm b)dx = \frac{1}{a}\int(ax \pm b)d(ax \pm b),$$

Где a и b − постоянные.

Примеры

1.$\int(1-4x)^2\, dx = -\frac{1}{4}\int(1-4x)^2\, d(1-4x) = -\frac{1}{4}\frac{(1-4x)^3}{3} + С = -\frac{1}{12}(1-$
$4x3+C$

2. $\int \frac{dx}{(3-2x)} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(3-2x)}{(3-2x)} = -\frac{1}{2}\ln|3-2x| + С;$

3. $\int 7^{5x-11}dx = \frac{1}{5}\int 7^{5x-11}d(5x-11) = \frac{1}{5}\cdot\frac{7^{5x-11}}{\ln 7} + С = \frac{7^{5x-11}}{5\ln 7} + С.$

Подстановка вида $u = \phi(x)$

Если под знаком интеграла стоит сложная функция, умноженная на производную от внутренней функции, т.е. интеграл имеет вид:

$$\int f[\phi(x)]\acute{\phi}\,(x)dx,$$

то этот интеграл можно упростить, если заменить внутреннюю функцию новой переменной $u = \phi(x)$.

Тогда получим

$$\int f[\phi(x)]\acute{\phi}\,(x)dx = \int f[\phi(x)]d[\phi(x)] = \int f(u)du.$$

В данном случае была применена операция «подведения под знак дифференциала»$\phi(x)dx = d[\phi(x)]$.

Метод интегрирования по частям.

Метод интегрирования по частям следует из формулы дифференцирования произведения двух функций.

Если $u(x)$и $v(x)$− дифференцируемые функции, то

$$d(u \cdot v) = udv + vdu.$$

Интегрируя это равенство, получим

$$\int d(u \cdot v) = \int udv + \int vdu$$

или

$$u \cdot v = \int udv + \int vdu.$$

Тогда

$$\int udv = u \cdot v - \int vdu.$$

Последняя формула называется *формулой интегрирования по частям*. Она сводит вычисление интеграла $\int udv$к вычислению интеграла$\int vdu$, который может оказаться более простым, чем первый.

В таблице приведены типы интегралов, которые могут быть вычислены только по частям, и указано, что следует принимать за ***u***и, что на ***dv***.

№ п/п	**Интеграл**	$\boldsymbol{u}$	$\boldsymbol{dv}$
1.	$\int x^n\, e^{ax}\, dx$	x^n	$e^{ax}\, dx$

2.	$\int x^n \sin bx\, dx$	x^n	$\sin bx\, dx$
3.	$\int x^n \cos bx\, dx$	x^n	$\cos bx\, dx$
4.	$\int x^n \ln x\, dx$	$\ln x$	$x^n dx$
5.	$\int x^n \arcsin x\, dx$	$\arcsin x$	$x^n dx$
6.	$\int x^n \arccos x\, dx$	$\arccos x$	$x^n dx$
7.	$\int x^n\, arctg\, x\, dx$	$arctg\, x$	$x^n dx$
8.	$\int x^n arcctg\, x\, dx$	$arcctg\, x$	$x^n dx$
9.	$\int e^{ax} \sin bx\, dx$	e^{ax}	$\sin bx\, dx$
10.	$\int e^{ax} \cos bx\, dx$	e^{ax}	$\cos bx\, dx$

где a и b – числа.

Замечание.

Иногда для получения результата надо последовательно применить интегрирование по частям несколько раз.

Примеры

1. $\int x\, e^x dx = \left\langle \begin{matrix} x = u & e^x dx = dv \\ du = dx & v = e^x \end{matrix} \right\rangle = xe^x - \int e^x\, dx = xe^x - e^x + C;$

2. $\int arctg\, x\, dx = \left\langle \begin{matrix} arctg\, x\, dx = u & dx = dv \\ du = \frac{dx}{1+x^2} & v = x \end{matrix} \right\rangle = x \cdot arctg\, x - \int \frac{x\, dx}{1+x^2} = x \cdot arctg\, x - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = x \cdot arctg\, x - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C;$

Список литературы:

1. Ахтямов А.М. Математика для социологов и экономистов. − М.: Физматлит, 2004.

2. Ганичева А.В., Козлов В.П. Математика для психологов. − М.: Аспект Пресс, 2005.

3. Демидович Б.П., Кудрявцев В.А. Краткий курс высшей математики. − М.: Астрель·АСТ, 2004.

4. Дорофеева А.В. Высшая математика. Гуманитарные специальности. − М.: Дрофа, 2004.

5. Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. − М.: Айрис Пресс, 2006.

6. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики. − М.: Наука, 1968.

7. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. − М.: Физматлит, 2003.

8. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.I,II.−М.: Наука, 1966.

9. Фролов С.В., Шостак Р.Я. Курс высшей математики.−М.: Высшая школа, 1973.