ВЕКТОРЫ: ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ДЕЙСТВИЯ НАД ВЕКТОРАМИ

Мельникова М.В

Иманова А.Н

Студенты ИТФ

Елабужский институт КФУ

Научный руководитель: Миронова Ю.Н

Определение вектора, основные виды.

Вектор (от лат. «*vector*» – «несущий») – направленный отрезок прямой в пространстве или на плоскости.

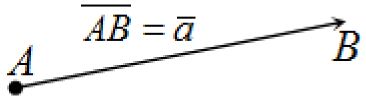

Рис. 1

Графически вектор изображается в виде направленного отрезка прямой определенной длины. Вектор, начало которого находится в точке A, а конец – в точке B, обозначается как $\overrightarrow{AB}$ (рис. 1). Также вектор можно обозначать одной маленькой буквой, например, $\vec{a}$.

Если в пространстве задана система координат, то вектор можно однозначно задать набором своих координат. То есть под вектором понимается объект, который имеет величину (длину), направление и точку приложения (начало вектора).

Начала векторного исчисления появились в работах в 1831 году в работах немецкого математика, механика, физика, астронома и геодезиста Иоганна Карла Фридриха Гаусса (1777-1855). Работы, посвященные операциям с векторами, опубликовал ирландский математик, механик и физик-теоретик, сэр Уильям Роуэн Гамильтон (1805-1865) в рамках своего кватернионного исчисления. Ученый предложил термин «вектор» и описал некоторые операции над векторами. Векторное исчисление получило свое дальнейшее развитие благодаря работам по электромагнетизму британского физика, математика и механика Джеймса Клерка Максвелла (1831-1879). В 1880-х годах увидела свет книга «Элементы векторного анализа» американского физика, физикохимика, математика и механика Джозайя Уилларда Гиббса (1839-1903). Современный векторный анализ был описан в 1903 году в работах английского ученого-самоучки, инженера, математика и физика Оливера Хевисайда (1850-1925).

Длиной или **модулем вектора** называется длина направленного отрезка, определяющего вектор.

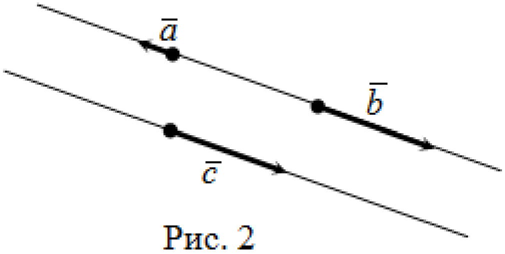

Рис. 2

Основные виды векторов

Нулевым вектором называется вектор $\vec{0}$, у которого начальная точка и конечная точка совпадают. Длина нулевого вектора равна нулю.

Векторы, параллельные одной прямой или лежащие на одной прямой, называют **коллинеарными** (рис. 2).

Два коллинеарных вектора называются **сонаправленными**, если их направления совпадают.

На рисунке 2 – это векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Два коллинеарных вектора называются **противоположно направленными**, если их направления противоположны.

На рисунке 3 – это векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

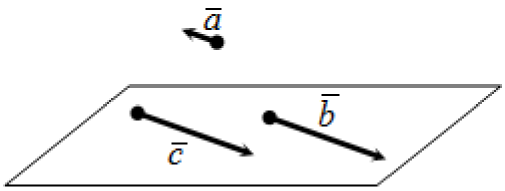

Рис. 3

Три вектора, параллельные одной плоскости или лежащие в одной плоскости, называют **компланарными** (рис. 3).

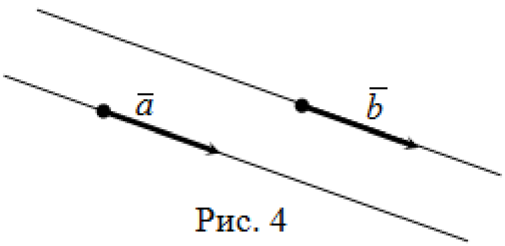

Рис. 4

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{в}$ называются **равными**, если они являются сонаправленными и их длины равны (рис. 4).

Единичным вектором или **ортом** называется вектор единичной длины.

<u>Действия над векторами.</u>

1) Сложение векторов.

Суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{в}$ является диагональ параллелограмма, построенного на этих векторах, исходящая из общей точки их приложения **(правило параллелограмма)**.

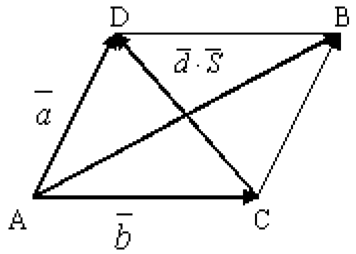

Рис.5.

Суммой трех векторов $\vec{a}, \vec{в}, \vec{c}$ называется диагональ параллелепипеда, построенного на этих векторах **(правило параллелепипеда).**

Если *A*, *B*, *C* – произвольные точки, то $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ **(правило треугольника)**.

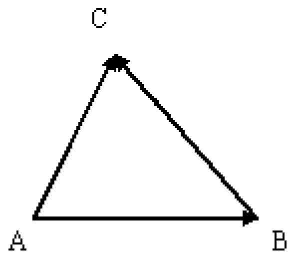

Рис.6

Свойства сложения.

1°. $\boldsymbol{\vec{a}} + \vec{\mathbf{b}} = \boldsymbol{\vec{b}} + \boldsymbol{\vec{a}}$ (переместительный закон).

2°. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + b) + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{c}) + \vec{b}$ (сочетательный закон).

3°. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{\mathbf{0}}$

2) Вычитание векторов.

Под ***разностью*** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ понимают вектор $\boldsymbol{\vec{d}} = \vec{a} - \vec{b}$ такой, что $\vec{b} + \vec{d} = \vec{a}$.

В параллелограмме – это другая <u>диагональ</u> AB (см. рис.1).

3) Умножение вектора на число.

Произведением вектора $\vec{a}$ на скаляр $\boldsymbol{k}$ называется вектор

$\vec{b} = \boldsymbol{k\vec{a}} = \boldsymbol{\vec{a}k},$

имеющий длину $\boldsymbol{ka}$, и направление, которого:

1. совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если $k > 0$;
2. противоположно направлению вектора $\vec{a}$, если $k < 0$;
3. произвольно, если $k = 0$.

Свойства умножения вектора на число.

1°. $\boldsymbol{(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}}$.

$\boldsymbol{k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}}$.

2°. $\boldsymbol{k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a}}$.

3°. $\boldsymbol{1 \cdot \vec{a} = \vec{a}, (-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}, 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}}$.

Проекция вектора на ось.

Проекция вектора $\vec{a}$ на ось (направленная прямая) l равна произведению длины вектора $\vec{a}$ на косинус угла между направлением вектора и направлением оси, т.е. $\text{пр}\vec{a} = a \cdot \cos\alpha$, $\alpha = \angle(\vec{a}, l)$.

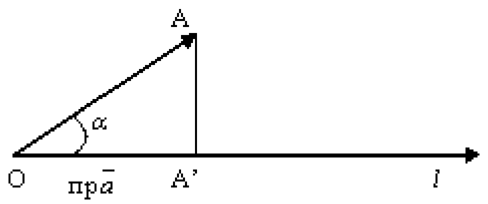

Рис.7

<u>Координаты вектора</u>

Проекции вектора $\vec{a}$ на координатные оси Ox, Oy, Oz называются ***координатами вектора.*** Обозначение: $\vec{a}\{a_x, a_y, a_z\}$.

Длина вектора: $|\vec{a}| = \sqrt{\mathbf{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$

Пример: Вычислить длину вектора $\vec{a}$ (1,2,-3).

Решение: $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^3} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$

Расстояние между точками $M_1\ (x_{1,} y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ вычисляется по формуле:

$$\mathbf{d} = \sqrt{(\mathbf{x_2}-\mathbf{x_1})^2+(\mathbf{y_2}-\mathbf{y_1})^2+(\mathbf{z_2}-\mathbf{z_1})^2}.$$

Пример: Найти расстояние между точками М (2,3,-1) и К (4,5,2).

$$\mathbf{d} = \sqrt{(\mathbf{4}-\mathbf{2})^2-(\mathbf{5}-\mathbf{3})^2+(\mathbf{2}+\mathbf{1})^2} = \sqrt{\mathbf{4}+\mathbf{4}+\mathbf{9}} = \sqrt{\mathbf{17}}$$

<u>Действия над векторами в координатной форме.</u>

Даны векторы $|\vec{a}| = \{a_x, a_y, a_z\}$ и $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$

1. $(\vec{\mathbf{a}} \pm \vec{\mathbf{b}}) = \{\mathbf{a_x} \pm \mathbf{b_x}, \mathbf{a_y} \pm \mathbf{b_y}, \mathbf{a_z} \pm \mathbf{b_z}\}$

2. $\lambda\vec{a} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}$, где λ - скаляр.

Скалярное произведение векторов.

Под скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ понимается число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, т.е. $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = |\vec{\mathbf{a}}| \cdot |\vec{\mathbf{b}}| \cdot \cos\alpha$, $\boldsymbol{\alpha}$ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Векторное произведение в координатной форме.

Если известны координаты векторов $\vec{\mathbf{a}}$ $(\mathbf{a_x}, \mathbf{a_y}, \mathbf{a_z})$ и $\vec{\mathbf{b}}$ $(\mathbf{b_x}, \mathbf{b_y}, \mathbf{b_z})$, то их векторное произведение находится по формуле:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot(a_y b_z - a_z b_y) - \vec{j}\cdot(a_x b_z - a_z b_x) + \vec{k}\cdot(a_x b_y - a_y b_x)$$

Тогда из определения векторного произведения следует, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, вычисляется по формуле:

$$S = |\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{\left(a_y b_z - a_z b_y\right)^2 + (a_x b_z - a_z b_x)^2 + (a_x b_y - a_y b_x)^2}\,.$$

Пример: Вычислить площадь треугольника с вершинами А (1;-1;2), В (5;-6;2), С (1;3;-1).

Решение: $S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot S_{\text{пар.}}$

$\overrightarrow{AB} = \{(5-1),(-6+1),(2-2)\} = \{4,-5,0\}$, $\overrightarrow{AC} = \{(1-1),(-1-3),(-1-2)\} = \{0,-4,-3\}$, тогда площадь треугольника АВС будет вычисляться следующим образом:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot S_{\text{пар}} = |\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|`$$

$$|\overrightarrow{AB}|\times|\overrightarrow{AC}| = \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & -4 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot(15-0) - \vec{j}(-12-0) + \vec{k}(-16-0) = 15\vec{i} + 12\vec{j} + 16\vec{k} =$$

=(15,12,16)

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{15^2 + 12^2 + 16^2} = \sqrt{225 + 144 + 256} = \sqrt{625} = 25,$$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 25 = 12{,}5$ (кв.ед.)

Смешанное произведение векторов.

Смешанным (векторно-скалярным) произведением векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число, определяемое по формуле: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a}\ (\vec{b} \times \vec{c})$.

Базис системы векторов.

Определение. Под системой векторов понимают несколько векторов, принадлежащих одному и тому же пространству **R.**

Замечание. Если система состоит из конечного числа векторов, то их обозначают одной и той же буквой с разными индексами.

Пример. $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4\}$
Определение. Любой вектор вида $\vec{a} = k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 \ldots + k_n\vec{a}_n$ называется линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n$. Числа $\boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2}, \ldots \boldsymbol{k_n}$ - коэффициентами линейной комбинации.

Пример $\boldsymbol{\vec{a} = 2\,\vec{a}_1 - 3\vec{a}_2 + \vec{a}_2}$

Если вектор $\vec{a}$ является линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n$, то говорят, что вектор $\vec{a}$ линейно выражается через векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n$.

Система векторов называется **линейно независимой**, если ни один вектор системы не может быть выражен как линейная комбинация остальных векторов. В противном случае систему называют линейно-зависимой.

Пример. Система векторов $\vec{a}_1(1{,}2), \vec{a}_2(-2{,}1), \vec{a}_3(0{,}5)$. линейно зависима, т.к. вектор

$\vec{a}_3 = 2\,\vec{a}_1 + \vec{a}_2$.

Определение базиса. Система векторов образует базис, если:

1) она линейно независима,

2) любой вектор пространства через нее линейно выражается.

Пример 1. Базис пространства R^3: $\vec{e}_1$ (1,0,0), $\vec{e}_2$ (0,1,0), $\vec{e}_3$(0,0,1).

Пример 2. В системе векторов $\vec{a}_1\,(1{,}2), \vec{a}_2(-2{,}1), \vec{a}_3(0{,}5)$ базисом являются векторы: $\vec{a}_1, \vec{a}_2$, т.к. $\vec{a}_3 = 2 \cdot \vec{a}_1 + \vec{a}_2$ линейно выражается через векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2$.

Замечание. Чтобы найти базис данной системы векторов необходимо:

1) записать координаты векторов в матрицу,

2) с помощью элементарных преобразований привести матрицу к треугольному виду,

3) ненулевые строки матрицы будут являться базисом системы,

4) количество векторов в базисе равно рангу матрицы.

<u>Список литературы:</u>

1. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б., Позняк Э.Г., Юдина И.И. Геометрия 7-9 классы: учебник для общеобразовательных учреждений - М.: Просвещение, 2013.
2. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. - М, Наука, 1968, 912 с.
3. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.- М, Наука, 1971.
4. Мусхелишвили Н.И. Курс аналитической геометрии. - М, Высшая школа, 1967.
5. Интернет-ресурс http://www.mathematica.ru
6. Интернет-ресурс «Библиофонд» https://www.bibliofond.ru/view.aspx?id=84047