Анализ сходимости рядов для вычисления числа π

с помощью СКМ MATHCAD.

Сёмина А. В., Гафиятуллина Д. Р.

студентки факультета ИТФ

Елабужского института КФУ

Научный руководитель – Миронова Ю.Н.

В связи с развитием компьютерной математики появилась возможность поставить ряд новых вопросов, ответы на которые ранее получить было просто немыслимо, потому что для достижения конечного результата необходимо было бы провести огромное количество сложных вычислений. В этой работе привлекается внимание к знаменитому числу Пи. Видимо не случайно то, что возникнув в умах людей еще до нашей эры, интерес к нему продолжается и по сей день. Десятки столетий назад интересовала точность числа. В связи с этим важное значение имеют формулы, которых накопилось значительное количество. Интересен вопрос о сравнительном анализе быстроты сходимости. Затем стали интересовать особые свойства Пи среди остальных чисел. А в последнее время, в связи с появлением мощных компьютеров, и распределение различных подпоследовательностей в разложениях числа в разных системах счисления. Примером может служить вычисление числа Пи, выполненное французом Фабрис Белларом [1]. Он вычислил число с точностью около 2,7 триллиона десятичных знаков (2010 г.). Более того, в конце 2012 года в Японии вычислили число Пи уже с десятью триллионами знаками. В работах некоторых авторов еще один взгляд на анализ таких чисел «не рекламный». Как отмечено, математиков привлекают распределения всевозможных подпоследовательностей. Облачные вычисления по технология MapReduce могут стать полезными в физических экспериментах, шифровании и сборе научных данных. Разработчик таких вычислений Николас Сзе заявил, что такие эксперименты стали хорошей проверкой для оборудования и программного обеспечения Hadoop. "Подобные вычисления прекрасно подходят для тестирования", - сказал он. "Мы используем данный метод тестирования для сравнения уровня производительности процессоров компьютеров в наших кластерах". В некоторых работах последовательности Пи предлагается применять для **геометрического представления** на пространствах-графах, причем в разных системах счисления. Т.е. у Пи появляются новые геометрические характеристики, которые программно обрабатываются.

Докомпьютерный период вычисления числа Пи.

История существования числа Пи началась с того, что было замечено, что отношение длины окружности к диаметру одинаково для любой окружности, и что это отношение немногим более 3. Этот факт был известен ещё древнеегипетским, вавилонским, древнеиндийским и древнегреческим геометрам. Самое раннее из известных приближений датируется 1900 годом до н. э.; это 25/8 (Вавилон) и 256/81 (Египет), оба значения отличаются от истинного не более, чем на 1 %. Ведический текст «Шатапатха-брахмана» даёт π как $339/108 \approx 3{,}139$. По-видимому, в Танахе, в третьей книге Царств, предполагается, что $\pi = 3$, что является гораздо более худшей оценкой, чем имевшиеся на момент написания (600 год до н. э.).

Впервые обозначением этого числа греческой буквой π воспользовался британский математик Джонс в 1706 году, а общепринятым оно стало после работ Леонарда Эйлера в 1737 году. Это обозначение происходит от начальной буквы греческих слов περιφέρεια — окружность, периферия и περίμετρος — периметр.

Архимед, возможно, первым предложил математический способ вычисления π. Для этого он вписывал в окружность и описывал около неё правильные многоугольники. Принимая диаметр окружности за единицу, Архимед рассматривал периметр вписанного многоугольника как нижнюю оценку длины окружности, а периметр описанного многоугольника как верхнюю оценку. Рассматривая правильный 96-угольник, Архимед получил оценку $3+\frac{10}{71}<\pi<3+\frac{1}{7}$

и предположил, что π примерно равняется 22/7 ≈ 3.142857142857143.

Чжан Хэн во 2 веке уточнял значение числа π, предложив два его эквивалента: 1) 92/29 ≈ 3,1724…; 2) ≈ 3,1622

В Индии Ариабхата и Бхаскара использовали приближение 3,1416. Около 265 года н. э. математик Лю Хуэй из царства Вэй предоставил простой и точный итеративный алгоритм для вычисления π с любой степенью точности. Он самостоятельно провёл вычисление для 3072-угольника и получил приближённое значение для π по следующему принципу:

$$\pi \approx A_{3072} = 3\cdot 2^{8}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+1}}}}}}}}} \approx 3,14159.$$

Позднее Лю Хуэй придумал быстрый метод вычисления π и получил приближённое значение 3,1416 только лишь с 96-угольником, используя преимущества того факта, что разница в площади следующих друг за другом многоугольников формирует геометрическую прогрессию со знаменателем 4.

В 480-х годах китайский математик Цзу Чунчжи продемонстрировал, что π ≈ 355/113, и показал, что 3,1415926 < π < 3,1415927, используя алгоритм Лю Хуэя применительно к 12288-угольнику. Это значение оставалось самым точным приближением числа π в течение последующих 900 лет. До II тысячелетия было известно не более 10 цифр π. Так вкратце можно охарактеризовать «древний» период, известный под названием «геометрический».

Достижения «классической эры» в изучении π связаны с развитием математического анализа, в особенности с открытием рядов, позволяющих вычислять π с любой точностью, суммируя подходящее количество членов ряда. Т.к. целью данной работы не является хронологический анализ вычислений π, далее из-за обилия материала приведем только некоторые известные факты и красивые формулы.

В 1400-х годах Мадхава из Сангамаграма нашёл первый из таких рядов:

$$\pi = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \cdots$$

Однако этот ряд сходится к π очень медленно, что приводит к сложности вычисления многих цифр Необходимо сложить около 4000 членов ряда, чтобы улучшить оценку Архимеда. Однако преобразованием этого ряда в

$$\pi = \sqrt{12}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \cdots\right)$$

Мадхава смог вычислить π как 3,14159265359, верно определив 11 цифр в записи числа. Одновременно в Европе начали развиваться методы анализа и определения бесконечных рядов. Первым таким представлением была формула Виета:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdot\cdots,$$

найденная Франсуа Виетом в 1593 году.

Другим известным результатом стала формула Валлиса:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots$$

выведенная Джоном Валлисом в 1655 году.

Т.к. прогресс в вычислении числовых рядов в настоящее время связан с появлением электронных устройств, позволяющих гораздо быстрее и точнее проводить вычисления, чем вручную, далее мы совместим представление некоторых формул для π и их сопутствующих вычислений в системе компьютерной математики MATHCAD [2].

Компьютерный период изучения числа Пи

В этом разделе мы выборочно представим несколько числовых рядов для вычисления, и параллельно будем сопоставлять их с более точным числом, так чтобы была возможность оценить количество совпадающих знаков после запятой в десятичной системе счисления. Будем обращать внимание на взятое число членов ряда, которое естественно влияет на точность π. Во всех примерах до тире указаны совпадающие знаки числа. Все вычисления проводились в системе MATHCAD [3]. Формулы для вычисления Пи полезны и в учебных целях при изучении языка программирования и кодировании алгоритмов.

Предполагается, что в 1400-х годах Мадхава из Сангамаграма (англ. Madhava of Sangamagrama) нашёл первый из таких рядов. Этот результат известен как ряд Мадхавы — Лейбница, или ряд Грегори — Лейбница (после того как он был заново обнаружен Джеймсом Грегори и Готфридом Лейбницем в XVII веке). Этот ряд сходится к π очень медленно,

$$4 \cdot \sum_{k=1}^{2000} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{2 \cdot k - 1} = \qquad \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots = \frac{\pi}{4}$$

$$3.14 - 1092653621043228697025829557998696861597670652652273407 60 \tag{1}$$

Другим известным результатом стала формула Валлиса, выведенная Джоном Валлисом в 1655 году. Сходимость также медленная.

$$2 \cdot \prod_{k=1}^{2000} \frac{2 \cdot k}{2 \cdot k - 1} \cdot \frac{2 \cdot k}{2 \cdot k + 1} = \qquad \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots = \frac{\pi}{2}$$

$$3.141 - 200077192817923637710779814537533600434250360281022458 44 \tag{2}$$

Далее выборочно:

$$\sqrt{6 \cdot \sum_{i=1}^{2000} \frac{1}{i \cdot i}} = \qquad \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \ldots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$3.141 - 115271836479200859100282018149813178329577505816588740 18 \tag{3}$$

$$4 \cdot \sum_{k=0}^{2000} (-1)^k \cdot \left(\frac{1}{10 \cdot k + 1} - \frac{1}{10 \cdot k + 3} + \frac{1}{10 \cdot k + 5} - \frac{1}{10 \cdot k + 7} + \frac{1}{10 \cdot k + 9} \right) =$$

$$3.141 - 692603614531119337949409897708726779319185353199218091 54 \tag{4}$$

$$\frac{\prod_{k=1}^{2000}\left(1+\frac{1}{4\cdot k\cdot k-1}\right)}{\sum_{k=1}^{2000}\frac{1}{4\cdot k\cdot k-1}} = \blacksquare$$

3.141 – 98537721211612811862020750949116798383435892287109271405 (5)

$$\sum_{k=0}^{20}\frac{(k!)^2\cdot 2^{k+1}}{(2\cdot k+1)!} = \blacksquare \qquad \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2\,2^{n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(2n+1)!!}$$

3.141592 – 29874033963270192249602425888009447095729600649312093

(6)

$$\sqrt{12}\cdot\left[1+\sum_{k=1}^{20}\frac{(-1)^k}{(2\cdot k+1)\cdot 3^k}\right] = \blacksquare \qquad \pi = \sqrt{12}\left(1-\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 3^2}-\frac{1}{7\cdot 3^3}+\cdots\right)$$

3.1415926535 – 9563495837242748501828178316391880339733518798115

(7)

$$\sum_{k=0}^{20} 2\cdot\frac{(-1)^k\cdot 3^{\frac{1}{2}-k}}{2k+1} = \blacksquare$$

3.1415926535 – 9563495837242748501828178316391880339733518798115 (8)

$$\frac{9}{2\cdot\sqrt{3}}\cdot\sum_{k=0}^{20}\frac{(k!)^2}{(2\cdot k+1)!} = \blacksquare$$

3.14159265358 – 964465532888747148778986777750321652502423020394

(9)

Важным развитием недавнего времени стала формула Бэйли — Боруэйна — Плаффа (англ. Bailey–Borwein–Plouffe formula), открытая в 1997 году Саймоном Плаффом (англ. Simon Plouffe) и названная по авторам статьи, в которой она впервые была опубликована. Эта формула примечательна тем, что она позволяет извлечь любую конкретную шестнадцатеричную или двоичную цифру числа π без вычисления предыдущих.

$$\sum_{k=0}^{5}\left(\frac{4}{8\cdot k+1}-\frac{2}{8\cdot k+4}-\frac{1}{8\cdot k+5}-\frac{1}{8\cdot k+6}\right)\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^{k}=$$

$$3.141592653-2280875347343780355362044695585280121978019348 \qquad (10)$$

И ее улучшенный вариант

$$\frac{1}{16}\cdot\sum_{k=0}^{5}\frac{1}{256^{k}}\cdot\left(\frac{64}{16\cdot k+1}-\frac{32}{16\cdot k+4}-\frac{16}{16\cdot k+5}-\frac{16}{16\cdot k+6}+\frac{4}{16\cdot k+9}-\frac{2}{16\cdot k+12}-\frac{1}{16\cdot k+13}-\frac{1}{16\cdot k+14}\right)=$$

$$3.14159265358979323-27112922619300771634226062754359011516353 0 \qquad (11)$$

Быстросходящаяся формула Фабриса Беллара.

$$\frac{1}{64}\cdot\sum_{k=0}^{2}\frac{(-1)^{k}}{2^{10k}}\cdot\left[\left(\frac{-32}{4k+1}-\frac{1}{4k+3}+\frac{256}{10k+1}-\frac{64}{10k+3}-\frac{4}{10k+5}\right)-\frac{4}{10k+7}+\frac{1}{10k+9}\right]=3.142$$

$$3.141592653-6420507699442837856739095941476175507766523404215 4 \qquad (12)$$

В начале XX века индийский математик Сриниваса Рамануджан обнаружил множество новых формул для π, некоторые из которых стали знаменитыми из-за своей элегантности и математической глубины. Одна из этих формул — это ряд:

$$\frac{1}{\pi}=\frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k)!(1103+26390k)}{(k!)^{4}396^{4k}}$$

$$\frac{1}{\left[\frac{2\cdot\sqrt{2}}{9801}\cdot\sum_{k=0}^{2}\frac{(4\cdot k)!\cdot(1103+26390\cdot k)}{k!\cdot 396^{4\cdot k}}\right]}=$$

$$3.1415926535897-8876170885174148727021344005555438115977919556 \qquad (13)$$

Братьями Чудновскими в 1987 году найдена похожая на неё:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{426880\sqrt{10005}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(6k)!(13591409 + 545140134k)}{(3k)!(k!)^3(-640320)^{3k}}$$

$$\frac{1}{\left[\frac{1}{426880 \cdot \sqrt{10005}} \cdot \sum_{k=0}^{2} \frac{(6 \cdot k)! \cdot (13591409 + 545140134 \cdot k)}{(3 \cdot k)! \cdot (k!)^3 \cdot (-640320)^{3 \cdot k}}\right]} =$$

$$3.141592653589793238462643383279502884197167 \quad - \quad 767885484628791275 \qquad (14)$$

которая даёт примерно по 14 цифр на каждый член ряда. Благодаря ей в 1989 году было получено 1 011 196 691 цифр десятичного разложения. Эта формула используется в программах, вычисляющих π на персональных компьютерах, в отличие от суперкомпьютеров, которые устанавливают современные рекорды.

И модифицированный вариант

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (6n)!(A + Bn)}{(n!)^3(3n)!C^{3n+3/2}}$$

$A := 13591409 \quad B := 545140134 \quad C := 640320$

$$\frac{1}{12 \cdot \sum_{k=0}^{2} \frac{(-1)^k}{(k!)^3 \cdot (3 \cdot k)! \cdot 640320^{3 \cdot k + \frac{3}{2}}} \cdot (6 \cdot k)! \cdot (13591409 + 545140134 \cdot k)} =$$

$$3.141592653589793238462643383279502884197167 \quad - \quad 67885484628791272 \qquad (15)$$

Сводная таблица о сходимости рядов

№ формулы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Кол-во членов ряда	**2000**	**2000**	**2000**	**2000**	**2000**	**20**	**20**	**20**	**20**	**6**	**6**	**3**	**3**	**3**	**3**
Кол-во совпад. знаков	**2**	**3**	**3**	**3**	**3**	**6**	**10**	**10**	**11**	**9**	**17**	**9**	**13**	**41**	**42**

Заметен прогресс математики. Ранее, чтобы получить точность в три знака, необходимо брать тысячи членов ряда. Сейчас три члена дают уже 40 верных знаков. Однако человеческому уму для этого потребовались столетия.

Вычисления со сверхбольшой точностью

Рекордные вычисления провели американец Александр Йи и японец Шигеру Кондо (2012г.). Они вычислили Пи с свыше 10 триллионами десятичных цифр. Предыдущий рекорд по вычислению знаков Пи (5 триллионов) - также принадлежит им. Для работы использовался специально созданный компьютер, который работал 371 день. Десятитриллионная цифра числа Пи равна пяти. Характеристики компьютера:

Процессор: 2 x Intel Xeon X5680@3.33 ГГц - (12 физическими ядрами, 24 hyperthreaded).

Память: 96 Гб памяти DDR3 @ 1066 МГц - (12 x 8 ГБ - 6 каналов) - Samsung (M393B1K70BH1).

Материнская плата: Asus Z8PE-D12.

Жесткие диски:

1 ТБ SATA II (загрузочного диска) - Hitachi (HDS721010CLA332)

3 x 2 ТБ SATA II (магазин Pi Output) - Seagate (ST32000542AS)

16 x 2 ТБ SATA II (вычисления) - Seagate (ST32000641AS)

Raid контроллер: 2 x LSI MegaRAID SAS 9260-8i ОС - Windows Server 2008 R2 Enterprise x64. Официальный сайт проекта numberworld.org[3].

Совсем недавно ученые добились нового рекорда в математике - рассчитали число Пи до 2000000000000000 знаков после запятой (два квадрилиона). Николас Сзе (Nicholas Sze), сотрудник компании Yahoo, использовал технологии облачных вычислений Yahoo Hadoop. Вычисления, в котором была задействована одна тысяча компьютеров компании Yahoo, заняло 23 дня. Основой эксперимента стала технология MapReduce, разработанная инженерами Google, которая позволяет разделять сложные задачи на ряд более простых действий, что дает возможность намного быстрее производить математические вычисления. Кластер из тысячи компьютеров Yahoo именно таким методом высчитывал число Пи. Вычисления числа Пи издавна является любимым занятием многих математиков. Новый рекорд существенно обошел прошлый самый точный показатель. Вместо того, чтобы полностью высчитывать число Пи, каждый компьютер Hadoop работал над определенной частью цепочки. "Интересно, что наша формула позволяет вычислять Пи, экономя время на некоторых действиях", - объяснил господин Сзе новостному агентству BBC News. Фабрис Беллард (Fabrice Bellard), автор предыдущего рекорда вычисления Пи, сказал BBC News, что однопоточный и разделенный расчет существенно отличаются, ведь только второй может производится параллельно несколькими компьютерами, в чем и заключается успех последнего эксперимента.

Встает очевидный вопрос – зачем нужны такие вычисления? Ведь достаточно 10-15 знаков, чтобы получить достаточную точность. Но можно поставить задачу о поведении подпоследовательностей в разложении Пи. Ведь Пи не периодическое! Технология MapReduce может стать полезной в физических экспериментах, шифровании и сборе научных данных. Николас Сзе прибавил, что данный эксперимент стал хорошей проверкой для оборудования и программного обеспечения Hadoop. "Подобные вычисления прекрасно подходят для тестирования", - сказал он. "Мы используем данный метод тестирования для сравнения уровня производительности процессоров компьютеров в наших кластерах".

Заключение

Таким образом, существует три периода в истории вычислений числа π: древний, геометрический период, в течение которого π изучалось с позиции геометрии, классическая эра, последовавшая за развитием математического анализа в Европе в XVII веке, и эра цифровых компьютеров.

С помощью программы компьютерной математики MATHCAD проведен небольшой эмпирический анализ быстроты сходимости некоторых числовых рядов и произведено сопоставление формул.

Список используемой литературы

1. Fabrice Bellard. Of 2700 billion decimal digits of Pi using a Desktop Computer, 2010. http://bellard.org/pi/pi2700e9/pipcrecord.pdf
2. Дьяконов В. Mathcad 2001. Учебный курс. – СПб.: Питер. 2001 – 624с.
3. Сайт http://numberworld.org
4. Электронный ресурс - https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B8_(%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE)
5. Электронный ресурс - https://shkolazhizni.ru/culture/articles/14621/