Свойства определителей и их применение в конкретных задачах.

Егорова О. С. Ведерникова Е. Е.
Елабужский институт КФУ, ИТФ
Научный руководитель Миронова Ю. Н.

<u>Определения</u>

Матрица – прямоугольная таблица, составленная из элементов произвольной природы. Элементы матрицы располагаются в строки и столбцы (иногда их называют колонками). Строки и столбцы часто называют собирательным термином «ряды матрицы». Элементы матрицы часто обозначают двойными индексами – a_{ij}; первый индекс i означает номер строки матрицы, в которой стоит элемент a_{ij}, а второй индекс j означает номер столбца матрицы, в котором стоит a_{ij}. Матрицы символически обозначают заключёнными в круглые или квадратные скобки, или двойные вертикальные черточки. Матрица называется квадратной, если i=j.

Каждой квадратной матрице, элементами которой являются числа, ставится в соответствие число, называемое **определителем матрицы**.

Определитель (детерминант) n-го порядка – алгебраическая сумма n! слагаемых членов из элементов квадратной матрицы (таблицы), которое вычисляется по следующему закону: каждое слагаемое есть произведение n элементов взятых по одному и только по одному из каждой строки и из каждого столбца матрицы. Каждый член определителя берётся со знаком $(-1)^t$, где t – число инверсий во вторых индексах члена, когда первые индексы члена расположены в натуральном порядке.

<u>2. Пример вычисления определителя второго порядка в общем виде</u>

Пусть матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, тогда ее определитель будет содержать 2!=2 слагаемых:

$a_{11}a_{22}$ и $a_{21}a_{12}$, так как в перестановке$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ нет инверсий, следовательно, $(-1)^0$= -1, а в перестановке $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$есть одна инверсия и $(-1)^1$ = -1.

Значит, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

Минором или алгебраическим дополнением элемента a_{ij} квадратной матрицы или ее определителя, называется определитель порядка n-1, который получается из исходного вычеркиванием i – той строки и j – того столбца.

3. Свойства определителя

Определитель обладает рядом свойств:

1. Определитель не изменяется при транспортировании матриц (строк и столбцов).
2. Если один из столбцов (строк) состоит из нулей, то определитель равен нулю.
3. Если один из определителей получен из другого определителя перестановкой двух столбцов (строк), то определители отличаются друг от друга знаком.
4. Если все элементы какого-либо i-го столбца (строки) определителя являются суммами двух слагаемых, то такой определитель равен сумме двух определителей в первом из которых в качестве i-го столбца (строки) взяты первые слагаемые, а во втором – вторые слагаемые; при этом элементы всех остальных строк (столбцов) у каждого из трёх определителей одинаковы.
5. Определитель, содержащий два пропорциональных, в частности два равных, столбца (строки), равен нулю.
6. Определитель не меняется, если к какому-нибудь столбцу (строке) прибавить линейную комбинацию других столбцов (строк).
7. Если все элементы какого-нибудь столбца (строки) определителя умножить на некоторое число k, то есть весь определитель умножается на k, то общий множитель любой строки или любого столбца можно выносить за знак определителя.

5. Пример применения правила Крамера для решения систем n уравнений с n неизвестными

Определители очень широко используются при решении и исследовании систем линейных n уравнений с n неизвестными. Правило решения такой системы с помощью определителей называется **правилом Крамера.** Покажем это правило на примере.

Правило Крамера: правило решения системы n линейных уравнений. с n неизвестными, определитель которой отличен от нуля, всегда имеет решение. Это решение единственное и определяется таким правилом Крамера: значение каждого из неизвестных x = $\frac{\Delta x_i}{\Delta}$, где - определитель системы., матрица которого составлена из коэффициентов при неизвестных системы, a $_i$ – определитель, матрица которого получена заменой столбца коэффициентов при данном неизвестном на столбец свободных членов системы. В случае если определитель системы равен нулю, система имеет бесконечно много решений.

Используя метод Крамера, найдите решение системы алгебраических уравнений с тремя неизвестными.

$$\begin{cases} 2y - x - z = -1 \\ -z - y + 3x = -1 \\ -2x - 3z - 2y = 5 \end{cases}$$

В данном примере неизвестные переменные имеют другое обозначение (x, y и z вместо x_1, x_2 и x_3). Это не влияет на ход решения, но будьте внимательны с обозначениями переменных. В качестве основной матрицы системы НЕЛЬЗЯ брать $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Необходимо сначала упорядочить неизвестные переменные во всех уравнениях системы.

Для этого перепишем систему уравнений как $\begin{cases} x - 2y - z = -1 \\ 3x - y - z = -1 \\ -2x - 2y - 3z = 5 \end{cases}$. Теперь основную матрицу системы хорошо видно $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Вычислим ее определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot 3 - 2 \cdot (-1) \cdot (-2) - 1 \cdot 3 \cdot 2 -$$

$$-1 \cdot (-1) \cdot (-2) - 2 \cdot 3 \cdot 3 - 1 \cdot (-1) \cdot 2 = -11$$

Определитель основной матрицы отличен от нуля, следовательно, система уравнений имеет единственное решение. Найдем его методом Крамера. Запишем определители

$\Delta_x, \quad \Delta_y, \quad \Delta_z$ (обратите внимание на обозначения) и вычислим их:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)\cdot 3 + 2\cdot(-1)\cdot 5 + 1\cdot(-1)\cdot 2 -$$

$$-1\cdot(-1)\cdot 5 - 2\cdot(-1)\cdot 3 - (-1)\cdot(-1)\cdot 2 = 0$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot 3 + (-1)\cdot(-1)\cdot(-2) + 1\cdot 3\cdot 5 -$$

$$-1\cdot(-1)\cdot(-2) - (-1)\cdot 3\cdot 3 - 1\cdot(-1)\cdot 5 = 22$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot 5 + 2\cdot(-1)\cdot(-2) + (-1)\cdot 3\cdot 2 -$$

$$-(-1)\cdot(-1)\cdot(-2) - 2\cdot 3\cdot 5 - 1\cdot(-1)\cdot 2 = -33$$

Осталось найти неизвестные переменные по формулам $x = \frac{\Delta x}{\Delta}$; $y = \frac{\Delta y}{\Delta}$; $z = \frac{\Delta z}{\Delta}$ ::

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{0}{-11} = 0$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{22}{-11} = -2$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-33}{-11} = 3$$

Выполним проверку. Для этого умножим основную матрицу на полученное решение

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 - 2\cdot(-2) - 1\cdot 3 \\ 3\cdot 0 + (-1)\cdot(-2) - (-1)\cdot 3 \\ (-2)\cdot 0 - 2\cdot(-2) - 3\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

В результате получили столбец свободных членов исходной системы уравнений, поэтому решение найдено верно.

Ответ : x = 0, y = -2, z = 3.

Подведем итог:

Метод Крамера позволяет находить решение систем линейных алгебраических уравнений, если определитель основной матрицы отличен от нуля. По сути метод сводится к вычислению определителей матриц порядка n на n и применению соответствующих формул для нахождения неизвестных переменных.

Литература:

1.Метод Крамера для решения систем уравнений. [Электронный ресурс] URL: http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_5_4.php

2. Определитель матриц. [Электронный ресурс] URL: http://nauchniestati.ru/spravka/opredelitel-matricy/

3.