Производная функции и её вычисление

Петрова Регина Петровна, Сиразиева Резеда Харисовна

Елабужский институт Казанского федерального университета

Инженерно-технологическеий факультет.

Научный руководитель: Миронова Юлия Николаевна

В данной статье мы рассматриваем историю возникновения понятия производной, её свойства, геометрический и физический смысл и решение конкретных примеров.

Производная функции — понятие дифференциального исчисления, характеризующее скорость изменения функции в данной точке. В свою очередь функцию, имеющую конечную производную (в некоторой точке), называют дифференцируемой (в данной точке). Соответственно процесс вычисления производной называется дифференцированием, а обратный процесс — нахождение первообразной — интегрированием.

История возникновения формулы производной начинается ещё в 15 веке. Великий итальянский математик Тартальи, рассматривая и развивая вопрос - на сколько зависит дальность полёта снаряда от наклона орудия - применяет её в своих трудах. Формула производной часто встречается в работах известных математиков 17 века. Её применяют Ньютон и Лейбниц.

Посвящает целый трактат о роли производной в математике известный учёный Галилео Галилей. Затем производная и различные изложения с её применением стали встречаться в работах Декарта, французского математика Роберваля и англичанина Грегори. Большой вклад по изучению производной внесли такие умы, как Лопиталь, Бернулли, Лангранж и другие.

Объединив всё то, над чем трудились великие математики, создается таблица производных и выводятся правила дифференцирования.

1. $x' = 1$
2. $C' = 0$
3. $(C \cdot u)' = C \cdot u'$
4. $(u + v)' = u' + v'$
5. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
6. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
7. $(u^k)' = k \cdot u^{k-1} \cdot u'$

   $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
8. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
9. $(e^u)' = e^u \cdot u'$
10. $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$
11. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
12. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
13. $(tgu)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
14. $(ctgu)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
15. $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
16. $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
17. $(arctgu)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
18. $(arcctgu)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$

Рассмотрим несколько примеров:

1. Найти производную функции $y = x^3$

Такой функции в таблице нет. Но есть производная степенной функции в общем виде. В этом случае k=3. Подставляем число 3 вместо k и записываем результат:

$(x^3)' = 3 \cdot x^{3-1} = 3x^2$

Ответ: $y' = 3x^2$

2. Найти значение производной функции $y = \sin x$ в точке $x = 0$.

Это означает, что надо сначала найти производную от функции синус, а затем подставить значение $x=0$ в эту производную. По таблице находим синус и соответствующую производную:

$y' = (\sin x)' = \cos x$

Подставляем 0 в производную:

$y'(0) = \cos 0 = 1$

3. Найти производную функции $f(x) = x^3+2x^2-3x+5$

По свойству линейности производной получим:

$$f'(x) = (x^3 + 2x^2 - 3x + 5)' = (x^3)' + (2x^2)' - (3x)' + (5)'$$
$$= (x^3)' + 2 \cdot (x^2)' - 3 \cdot (x)' + (5)'$$

Далее воспользуемся таблицей производных элементарных функций:

$f'(x) = (x^3)' + 2 \cdot (x^2)' - 3 \cdot (x)' + (5)' = 3x^2 + 2 \cdot 2x - 3 \cdot 1 + 0 = 3x^2 + 4x - 3$

Ответ: $f(x) = 3x^2 + 4x - 3$

Геометрический и физический смысл производной

1) *Тангенс угла наклона касательной прямой*

Если функция $f: U(x_0) \to R$ имеет конечную производную в точке x_0, то в окрестности $U(x_0)$ её можно приблизить линейной функцией

$$f_l(x) \equiv f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Функция f_1 называется касательной к f в точке x_0. Число $f'(x_0)$ является угловым коэффициентом (угловым коэффициентом касательной) или тангенсом угла наклона касательной прямой.

2) *Скорость изменения функции*

Пусть S=S(t) — закон прямолинейного движения. Тогда $V(t_0) = S'(t_0)$ выражает мгновенную скорость движения в момент времени t_0. Вторая производная $a(t_0) = S''(t_0)$ выражает мгновенное ускорение в момент времени t_0.

Дифференцирование сложной функции

Цепное правило (правило дифференцирования сложной функции) позволяет вычислить производную композиции двух и более функций на основе индивидуальных производных. Если функция f имеет производную в точке x_0, а функция g имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$ то сложная функция $h(x) = g\big(f(x)\big)$ также имеет производную в точке x_0.

Пусть даны функции, определённые в окрестностях на числовой прямой, $f: U(x_0) \to V(y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$ и $g: V(\, y_0) \to R$

Пусть также эти функции дифференцируемы $f \in D(x_0)\,, g \in D(y_0)$.Тогда их композиция также дифференцируема: h=g, f∈ D(x_0) и её производная имеет вид: $h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

Пример.

Пусть $h(x) = (3x^2 - 5x)^7$. Тогда функция h может быть записана в виде композиции h=g, f∈ D(x_0) где

$f(x) = 3x^2 - 5x$,

$g(y) = y^7$

Дифференцируя эти функции отдельно:

$f'(x) = 6x - 5$

$g'(y) = 7y^6$

Получаем

$h'(x) = 7(3x^2 - 5x)^6 \cdot (6x - 5)$

Таким образом, мы рассмотрели производную функцию, её вычисление, геометрический и физический смысл, дифференцирование сложной функции, а также применение этих свойств в конкретных примерах. Данная статья будет полезна ученикам старших классов школы и студентам первых курсов высших учебных заведений и поможет более подробно изучить данную тему.

Список литературы

1) Производная функции. [Электронный ресурс] URL: https://ru.m.wikipedia.org/wiki/
2) История применения производной. [Электронный ресурс] URL: http://www.megazoobrila.ru/index/istoria_primenenia_proizvodnoj/0-417
3) Как найти производную? Примеры решений. [Электронный ресурс] URL:http://mathprofi.ru/kak_naiti_proizvodnuju.html
4) Высшая математика: Краткий курс: учебное пособие- Михеев В.И., Павлюченко Ю.В.
5) Латипова А.Ф., Суржикова О.В. Уравнение касательной и нормали // Всероссийская научно-практическая конференция "Математика в высшей школе". URL: http://econf.rae.ru/article/10421 (дата обращения: 30.05.2018).