Решение системы линейных уравнений методом Гаусса

Алиева Л.Э.

Елабужский институт Казанского Федерального Университета

Инженерно-технологический факультет

Научный руководитель: *Миронова Ю.Н.*

Ведение:

Многие, впервые сталкиваясь с высшей алгеброй, ошибочно полагают, что число уравнений обязательно должно совпадать с числом переменных. В школьной алгебре так обычно и бывает, однако для высшей алгебры это, вообще говоря, неверно. Решение систем линейных алгебраических уравнений – одна из основных задач вычислительной линейной алгебры. Хотя задача решения системы линейных уравнений сравнительно редко представляет самостоятельный интерес для приложений, от умения эффективнорешать такие системы часто зависит сама возможность математического моделирования самых разнообразных процессов с применением ЭВМ. Значительная часть численных методов решения различных (в особенности – нелинейных) задач включает в себя решение систем линейных уравнений как элементарный шаг соответствующего алгоритма.

Решение системы уравнений — это последовательность чисел ($k_1, k_2, \ldots, k_n$), которая является решением каждого уравнения системы, т.е. при подстановке в это уравнение вместо переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ дает верное числовое равенство.

Существует несколько способов решения систем линейных уравнений, которые в основном делятся на два типа: 1) точные методы, представляющие собой конечные алгоритмы для вычисления корней системы, 2) итерационные методы, позволяющие получать корни системы с заданной точностью путем сходящихся бесконечных процессов.

Основная часть

Одним из самых распространенных методов решения систем линейных уравнений является метод Гаусса. Он обладает рядом преимуществ по сравнению с другими методами:

- во-первых, нет необходимости предварительно исследовать систему уравнений на совместность;
- во-вторых, методом Гаусса можно решать не только СЛАУ (Системы Линейных Алгебраических Уравнений), в которых число уравнений совпадает с количеством неизвестных переменных и основная матрица системы невырожденная, но и системы уравнений, в которых число уравнений не совпадает с количеством неизвестных переменных или определитель основной матрицы равен нулю;
- в-третьих, метод Гаусса приводит к результату при сравнительно небольшом количестве вычислительных операций.

Рассмотрим систему из *p* линейных уравнений с *n* неизвестными (*p* может быть равно *n*):

$$\begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \dots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

где x_1 ,$x_2, \dots, x_n$- неизвестные переменные,

$a_{ij},\ i = 1,2, \dots, p,\ j = 1,2, \dots, n$ - числа (действительные или комплексные), $b_1, b_2, \dots, b_n$ - свободные члены.

- Если $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$ то система линейных алгебраических уравнений называется однородной, в противном случае – неоднородной.
- Совокупность значения неизвестных переменных $x_1 = a_1$,$x_2 = a_2, \dots, x_n$=a_n, при которых все уравнения системы обращаются в тождества, называется решением СЛАУ.
- Если существует хотя бы одно решение системы линейных алгебраических уравнений, то она называется совместной, в противном случае – несовместной.
- Если СЛАУ имеет единственное решение, то она называется определенной. Если решений больше одного, то система называется неопределенной.

Метод Гаусса классический метод решения системы линейных алгебраических уравнений. Это метод последовательного исключения переменных, когда с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого (или треугольного) вида, из которого последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные.

К элементарным преобразованиям системы отнесем следующее: 1. перемена местами двух любых уравнений; 2. умножение обеих частей любого из уравнений на произвольное число, отличное от нуля; 3. прибавление к обеим частям одного из уравнений системы соответствующих частей другого уравнения, умноженных на любое действительное число.

Пример 1. Решить систему линейных уравнений, применяя обратный ход метода Гаусса:

$$\begin{cases} x + y + \ z = 6 \\ \quad\ y + 2z = 8 \\ \qquad\quad z = 3 \end{cases}$$

Решение. В данной трапециевидной системе переменная *z* однозначно находится из третьего уравнения. Подставляем её значение во второе уравнение и получаем значение переменой *y*:

$$y + 6 = 8$$
$$y = 2$$

Теперь нам известны значения уже двух переменных - z и y. Подставляем их в первое уравнение и получаем значение переменной x:

$$x+2+3=6$$
$$x=1$$

Из предыдущих шагов выписываем решение системы уравнений:

$$(x=1;\ \ y=2;\ \ z=3)$$

Чтобы получить такую трапециевидную систему линейных уравнений, которую мы решили очень просто, требуется применять прямой ход метода Гаусса, связанный с элементарными преобразованиями системы линейных уравнений.

Пример 2. Решить методом Гаусса систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x+2y+z=2 \\ x-y+2x=-1 \\ 3x+2y+z=3 \end{cases}$$

Решая системы линейных уравнений школьными способами, мы почленно умножали одно из уравнений на некоторое число, так, чтобы коэффициенты при первой переменной в двух уравнениях были противоположными числами. При сложении уравнений происходит исключение этой переменной. Аналогично действует и метод Гаусса.

Для упрощения внешнего вида решения составим расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

В этой матрице слева до вертикальной черты расположены коэффициенты при неизвестных, а справа после вертикальной черты - свободные члены.

Для удобства деления коэффициентов при переменных (чтобы получить деление на единицу) переставим местами первую и вторую строки матрицы системы. Получим систему, эквивалентную данной, так как в системе линейных уравнений можно переставлять местами уравнения:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

С помощью нового первого уравнения исключим переменную x из второго и всех последующих уравнений. Для этого ко второй строке матрицы прибавим первую, умноженную на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ (в нашем случае на $-\frac{3}{1}$), к третьей – первую строку, умноженную на $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ (в нашем случае на $-\frac{2}{1}$).

Это возможно, так как $a_{11} \neq 0$.

Если бы в нашей системе уравнений было больше трёх, то следовало бы прибавлять и ко всем последующим уравнениям первую строку, умноженную на отношение соответствующих коэффициентов, взятых со знаком минус.

В результате получим матрицу эквивалентную данной системе новой системы уравнений, в которой все уравнения, начиная со второго не содержат переменную *x*:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 5 \end{array}\right)$$

Для упрощения второй строки полученной системы умножим её на $\frac{1}{5}$ и получим вновь матрицу системы уравнений, эквивалентной данной системе:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 5 \end{array}\right)$$

Теперь, сохраняя первое уравнение полученной системы без изменений, с помощью второго уравнения исключаем переменную *y* из всех последующих уравнений. Для этого к третьей строке матрицы системы прибавим вторую, умноженную на $-\frac{a'_{32}}{a'_{22}}$ (в нашем случае на $-\frac{4}{1}$).

Если бы в нашей системе уравнений было больше трёх, то следовало бы прибавлять и ко всем последующим уравнениям вторую строку, умноженную на отношение соответствующих коэффициентов, взятых со знаком минус.

В результате вновь получим матрицу системы, эквивалентной данной системе линейных уравнений:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Мы получили эквивалентную данной трапециевидную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x-y+2z=-1 \\ \quad y-z \quad =1 \\ \qquad z \quad =1 \end{cases}$$

Если число уравнений и переменных больше, чем в нашем примере, то процесс последовательного исключения переменных продолжается до тех пор, пока матрица системы не станет трапециевидной, как в нашем демо-примере.

Решение найдём "с конца" - это называется "обратный ход метода Гаусса". Для этого из последнего уравнения определим *z*: $z=1$.

Подставив это значение в предшествующее уравнение, найдём *y*:

$y=1+z$

$y=1+1=2.$

Из первого уравнения найдём *x*:

$x=-1+y-2z$

$x=-1+2-2=-1.$

Ответ: решение данной системы уравнений - $(x=-1;\ \ y=2;\ \ z=2)$.

Заключение

Ме́тод Га́усса — классический метод решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Назван в честь немецкого математика Карла Фридриха Гаусса. Это метод последовательного исключения переменных, когда с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе треугольного вида, из которой последовательно, начиная с последних (по номеру), находятся все переменные системы.

Достоинства метода

- Для матриц ограниченного размера менее трудоёмкий по сравнению с другими методами.
- Позволяет однозначно установить, совместна система или нет, и если совместна, найти её решение.
- Позволяет найти максимальное число линейно независимых уравнений — ранг матрицы системы.

Данные примеры и способы решения задач могут быть использованы на занятиях по высшей математике для студентов высших учебных заведений.

Библиографический список

1. *Метод Гаусса* — статья из Математической энциклопедии [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://slovare.coolreferat.com/словарь/словарь=математическая_энциклопедия_слово=Гаусса_метод

2. *Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра: Учебник для вузов*. — 6-е изд., стер. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 280 с.
3. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса [Электронный ресурс] – Режим доступа: *https://function-x.ru/systems_gauss.html*
4. Метод Гаусса [Электронный ресурс] – Режим доступа: www.wikipedia.org/wiki/Метод_Гаусса.
5. Роганин А.М. Основные формулы высшей математики. – Х.: Торсинг, 2002.