Определение и свойства логарифма

Гаттарова Л.Х.,
студентка факультета ИТФ
Елабужского института КФУ
Научный руководитель – Миронова Ю.Н.

Логарифмы обладают рядом характерных свойств. В этой статье мы разберем определение логарифма, основные свойства логарифмов. Здесь мы дадим некоторые формулировки, запишем свойства логарифмов в виде формул, покажем примеры их применения, а также приведем примеры решения задач с использованием свойств логарифмов.

Определение логарифма

Логарифмом положительного числа b по основанию $a\ (a > 0, a \neq 1)$, называется показатель степени, в которую нужно возвести a, чтобы получить b.

$$\log_a b = k \ \Leftrightarrow \ a^k = b$$

Например, $\log_3 8 = 3$, т.е. $2^3 = 8$.

Десятичный логарифм – это логарифм по основанию 10:

$$\log_{10} b = \lg b.$$

Натуральный логарифм – это логарифм по основанию е (е – иррациональное число, приближенное значение которогое≈2,7).

$$\log_e b = \ln b.$$

Основное логарифмическое тождество

Поскольку $\log_a b = k \ \Leftrightarrow \ a^k = b$, то подставим вместо k его значение в виде логарифма:

$$a^{\log_a b} = b,$$

где $a > 0, a \neq 1, b > 0$.

Например: $3^{\log_3 67} = 67$.

Основные свойства логарифмов, формулы

Для удобства запоминания и использования представим основные свойства логарифмов в виде списка формул.

1. $a^{\log_a b} = b.$
2. $\log_a a = 1.$
3. $\log_a 1 = 0.$
4. $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c.$
5. $\log_a(\frac{b}{c}) = \log_a b - \log_a c.$

Следующая группа свойств позволяет представить показатель степени выражения, стоящего под знаком логарифма, или стоящего в основании логарифма в виде коэффициента перед знаком логарифма:

6. $\log_{\mathrm{a}} \mathrm{b}^{\mathrm{n}} = \mathrm{n} \log_{\mathrm{a}} \mathrm{b}.$
7. $\log_{\mathrm{a}^{\mathrm{k}}} \mathrm{b} = \frac{1}{\mathrm{k}} \log_{\mathrm{a}} \mathrm{b}.$
8. $\log_{\mathrm{a}^{\mathrm{k}}} \mathrm{b}^{\mathrm{n}} = \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{k}} \log_{\mathrm{a}} \mathrm{b}.$
9. $\log_{\mathrm{a}^{\mathrm{n}}} \mathrm{b}^{\mathrm{n}} = \log_{\mathrm{a}} \mathrm{b}\,.$

Следующая группа формул позволяет перейти от логарифма с данным основанием к логарифму с произвольным основанием, и называется **формулами перехода к новому основанию**:

10. $\log_a b = \frac{\log_d b}{\log_d a}\,.$
11. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$
12. (следствие из свойства 11)

$$\log_a b \times \log_b a = 1.$$

Следующие два свойства не очень известны, однако они часто используются при решении логарифмических уравнений, или при упрощении выражений, содержащих логарифмы:

13. $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}.$
14. $a^{(\log_a b)^2} = b^{\log_a b}.$

Рассмотрим примеры упрощения выражений, содержащих логарифмы.

Пример 1.Вычислить значение выражения:

$$2^{\log_{\sqrt{2}} 2,5} - 7^{\log_{343}(7,25)^3} + 3^{4\log_9 2,5}$$

Упростим все показатели степеней, для этого необходимо привести их к логарифмам, в основании которых стоит то же число, что и в основании степени.

$$\log_{\sqrt{2}} 2,5 = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2,5 = (\text{по свойству } 7) 2\log_2 2,5 = (\text{по свойству } 6) \log_2 2,5^2 = \log_2 6,25.$$

$$\log_{343}(7,25)^3 = \log_{7^3}(7,25)^3 = \frac{1}{3}\log_7(7,25)^3 = \frac{3}{3}\log_7(7,25) = \log_7(7,25).$$

$$4\log_9 2,5 = 4\log_{3^2} 2,5 = \frac{4}{2}\log_3 2,5 = 2\log_3 2,5 = \log_3 2,5^2 = \log_3 6,25.$$

Подставив полученные показатели в исходное выражение и используя свойство 1, получаем:

$$2^{\log_2 6,25} - 7^{\log_7(7,25)} + 3^{\log_3 6,25} = 6,25 - 7,25 + 6,25 = 5,25.$$

Ответ: 5,25.

Пример 2. Вычислить значение выражения:

$$\frac{\log_6 30}{\log_{30} 6} - \frac{\log_6 180}{\log_5 6}.$$

Приведем все логарифмы к основанию 6 (при этом логарифмы из знаменателя дроби "перекочуют" в числитель):

$$\log_6 30 \times \log_6 30 - \log_6 180 \times \log_6 5\,.$$

Разложим числа, стоящие под знаком логарифма на простые множители:

$$\log_6(5 \times 6) \times \log_6(5 \times 6) - \log_6(6^2 \times 5) \times \log_6 5\,.$$

Применим свойства 4 и 6:

$$(\log_6 5 + \log_6 6) \times (\log_6 5 + \log_6 6) - (2\log_6 6 + \log_6 5) \times \log_6 5 = (\log_6 5 + 1) \times (\log_6 5 + 1) - (2 + \log_6 5) \times \log_6 5.$$

Введем замену: $\log_6 5 = t$.

$$(t+1)\times(t+1)-(2+t)\times t=(t+1)^2-(2+t)t.$$

Получим: $1+2t+t^2-2t-t^2=1$.

Ответ: 1.

Ниже даны несколько *рекомендаций*, следуя которым можно с легкостью решать все уравнения, содержащие выражения, которые стоят под знаком логарифма:

1. Непосредственно, решение и заключается в вычислении этой степени. До того как решить выражение с логарифмом, его необходимо упростить по правилу, то есть, пользуясь формуламии основными тождествами.

2. Складывая и вычитая логарифмы с двумя различными числами, но с одинаковыми основаниями, заменяйте одним логарифмом с произведением или делением чисел b и c соответственно. В таком случае можно применить формулу перехода к другому основания.

3. Если вы используете выражения для упрощения логарифма, то необходимо учитывать некоторые ограничения. А именно: основание логарифма a – только положительное число, но не равное единице. Числоb, как и a, должно быть больше нуля.

4. Есть случаи, когда упростив выражение, не возможно вычислить логарифм в числовом виде. Бывает, что такое выражение не имеет смысла, ведь многие степени – числа иррациональные. При таком условии необходимо оставить степень числа в виде записи логарифма.

Список литературы:

1. Логарифмы: примеры и решения. URL: http://fb.ru/article/333064/logarifmyi-primeryi-i-resheniya

2. Свойства логарифмов, формулировки и доказательства. URL: http://www.cleverstudents.ru/logarithms/properties_of_logarithms.html

3. Как решать логарифмы. URL: http://sovetclub.ru/kak-reshat-logarifmy

4. Примеры решения логарифмов. URL: http://ru.solverbook.com/primery-reshenij/primery-resheniya-logarifmov/

5. Макарова Н.В., Матвеева А.Е. Миронова Ю.Н., Интегрирование по частям как метод вычисления интегралов // Всероссийская научно-практическая конференция "Математика в высшей школе". URL: http://econf.rae.ru/article/9736 (дата обращения: 30.04.2018).