УДК 517.95:517.51

В.Л. Леонтьев

Метод решения начально-краевых задач для областей с криволинейными границами

На примере первой начально-краевой задачи для области с криволинейной границей излагается алгоритм обобщенного метода Фурье, связанный с применением ортогональных финитных функций. Показано, что формируемая алгоритмом метода последовательность конечных рядов Фурье в каждый момент времени сходится к точному решению задачи – бесконечному ряду Фурье. Структура этих конечных рядов Фурье аналогична структуре бесконечного ряда Фурье. При увеличении числа узлов сетки в рассматриваемой области с криволинейной границей имеет место сходимость приближенных собственных значений и собственных функций краевой задачи к точным собственным значениям и собственным функциям и при этом структуры конечных рядов Фурье приближаются к структуре бесконечного ряда Фурье, представляющего собой точное решение начально-краевой задачи. Метод дает сколь угодно точные приближенные аналитические решения задачи, по структуре аналогичные точному решению, и поэтому относится к группе аналитических методов построения решений в форме ортогональных рядов – обобщенных рядов Фурье, открывая новые возможности классического метода Фурье.

Введение.

Метод разделения переменных (метод Фурье) позволяет находить частные решения многих краевых и начально-краевых задач для уравнений в частных производных, допускающих разделение переменных. Метод связан с задачей Штурма-Лиувилля и, во многих случаях, со специальными функциями на этапе решения этой задачи. Классический метод Фурье позволяет получать решения широких классов задач, но его реализация для задач многих типов, в том числе задач, постановки которых содержат нерегулярные граничные условия, даже в тех случаях, в которых все участки границы области являются координатными линиями или поверхностями, встречается со значительными трудностями. Одно из направлений расширения области применения классического метода Фурье – решение сопутствующих методу математических проблем, например, связанных с характером граничных условий [1]. Специальные функции появляются при решении задачи Штурма-Лиувилля в цилиндрической или сферической системах координат, применение которых целесообразно в случаях областей, границы которых - координатные линии или поверхности в этих системах координат (границы цилиндрических и сферических областей). В общем случае задач для областей с криволинейными границами применение специальных функций является неэффективным. Классический метод Фурье применим только при решении краевых и начально-краевых задач для областей классической формы, что отмечается, например, в [2] при решении контактных задач для упругих тел с криволинейными границами. Решения, полученные классическим методом Фурье, приводятся, в частности, в статьях [3, 4, 5, 6], применение метода рассматривается во многих книгах, например, в [7]. Другие направления развития математических инструментов решения задач для областей с криволинейными границами связаны, во-первых, с созданием и применением ряда методов, отличных от метода Фурье, например [8, 2, 9, 10, 11], и, во-вторых, с модификацией самого метода Фурье. Данная статья ориентирована на расширение области применения классического метода Фурье, определяемое применением последовательности конечных обобщенных рядов Фурье, а также использованием при этом ортогональных финитных базисных функций (ортогональных базисных функций с компактными носителями), позволяющих находить решения задачи Штурма-Лиувилля на сетках в областях с криволинейными границами.

Рассматривается начально-краевая задача

$$L[u]=a^2\Delta u(x,y,t)=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\ \ \forall\,(x,y)\in S,\forall\ t\ge 0;$$

$$u(x,y,0)=f(x,y),\ \ \left.\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=F(x,y)\ \ \forall(x,y)\in S; \qquad (1)$$

$$u\big|_{\partial S}=0\ \ \forall\ t\ge 0;$$

где $\partial S-$кусочно-гладкая односвязная криволинейная граница области S, $u=u(x,y,t)$ - функция, непрерывная $\forall\ t\ge 0$ в замкнутой области $\overline{S}=S+\partial S$, $a^2=const>0$. На примере первой начально-краевой задачи (1) рассматривается алгоритм обобщенного метода Фурье решения начально-краевых задач для областей с криволинейными границами.

Согласно классическому методу Фурье, методу разделения переменных, решение задачи (1) ищется в виде произведения двух функций

$$u(x,y,t)=\varphi(x,y)\cdot\psi(t), \qquad (2)$$

подстановка которого в дифференциальное уравнение (1) приводит к

$$L[\varphi(x,y)]\cdot\psi(t)=\varphi(x,y)\frac{\partial^2\psi(t)}{\partial t^2}$$

или

$$\frac{L[\varphi(x,y)]}{\varphi(x,y)}=\frac{\partial^2\psi(t)/\partial t^2}{\psi(t)}=-\lambda=const(x,y,t)<0\ . \qquad (3)$$

Краевое условие (1) с учетом (2) дает

$$\varphi(x,y)\big|_{\partial S}=0 \qquad (4)$$

и поэтому из (3) следует краевая задача Штурма-Лиувилля

$$
\begin{aligned}
&L[\varphi] + \lambda\varphi = a^2 \Delta\varphi + \lambda\varphi = 0 \qquad (S), \\
&\varphi\big|_{\partial S} = 0,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

предназначенная для определения функции $\varphi(x,y)$. После решения этой задачи, то есть после построения систем собственных значений и соответствующих собственных функций $\varphi_k(x,y)$, находится соответствующая система решений $\psi_k(x,y)$ уравнения

$$
\frac{\partial^2 \psi(t)}{\partial t^2} + \lambda \psi(t) = 0 \ . \tag{6}
$$

Затем на основе $\psi_k(x,y)$ и $\varphi_k(x,y)$ с учетом начальных условий строится бесконечный функциональный ряд – точное решение задачи (1).

1. Обобщенный метод Фурье

Первые шаги алгоритма обобщенного метода Фурье для областей с криволинейной границей совпадают с аналогичными шагами классического метода Фурье. Решение задачи (1) также разыскивается в виде произведения (2), подстановка которого в дифференциальное уравнение (1) приводит к уравнению (3), а исходное граничное условие дает (4). Возникает та же краевая задача Штурма-Лиувилля (5). Из (3) также следует уравнение (6), решение которого связано с решением задачи Штурма-Лиувилля (5) и с учетом двух начальных условий (1).

Дальнейшие шаги алгоритма обобщенного метода Фурье, предназначенного для решения начально-краевых задач в случае областей с криволинейными границами, отличаются от соответствующих шагов классического алгоритма, поскольку связаны с применением ортогональных финитных функций при построении последовательности приближенных аналитических решений в форме конечных рядов Фурье и с предельным переходом в этой последовательности к точному решению задачи (1) – бесконечному ряду Фурье.

Нетривиальные решения краевой задачи (5) ищутся в виде

$$\varphi_N(x,y)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=j_1(i)}^{j_2(i)}\widetilde{C}_{ij}\widetilde{\alpha}_i(x)\widetilde{\beta}_j(y), \qquad (7)$$

где $\widetilde{C}_{ij}$ - постоянные коэффициенты; N, j_1, j_2 – натуральные числа, зависимость j_1, j_2 от i определяется криволинейной границей ∂S; $\widetilde{\alpha}_i(x),\ \widetilde{\beta}_j(y)$ - ортогональные финитные функции [12, 13], скалярные произведения которых обладают свойствами

$$(\widetilde{\alpha}_i,\widetilde{\alpha}_j)=\|\widetilde{\alpha}_i\|^2\delta_{ij},\ (\widetilde{\beta}_i,\widetilde{\beta}_j)=\|\widetilde{\beta}_i\|^2\delta_{ij}$$

где δ_{ij} – символы Кронекера. Область S вписана в прямоугольник $S_1=\{A\le x\le B;\ C\le y\le D\}$, то есть часть точек непрерывной криволинейной границы ∂S лежит на границе прямоугольной области S_1. Каждая непрерывная финитная функция $\widetilde{\alpha}_i(x), (i=1,2,...,N)$ не равна нулю только на интервале (x_{i-1},x_{i+1}) сетки $A=x_1<x_2<...<x_N=B$. Каждая непрерывная функция $\widetilde{\beta}_j(y)$ не равна нулю только на интервале (y_{j-1},y_{j+1}) сетки $C=y_1<y_2<...<y_M=D$. Конечные носители ортогональных (на каждой сетке) финитных функций $(\widetilde{\alpha}_i(x)\widetilde{\beta}_j(y))$ представляют собой прямоугольные подобласти. Заметим, что финитные функции [12, 13] допускают использование подобластей, состоящих из треугольников, в качестве конечных носителей ортогональных финитных функций.

Полученные в результате нормировки функции

$$\alpha_i(x)=\frac{\tilde{\alpha}_i(x)}{\left\|\tilde{\alpha}_i(x)\right\|},\quad \beta_j(y)=\frac{\tilde{\beta}_j(y)}{\left\|\tilde{\beta}_j(y)\right\|}$$

образуют две системы ортонормированных (для каждой сетки) функций, то есть $(\alpha_i,\alpha_j)=\delta_{ij}$, $(\beta_i,\beta_j)=\delta_{ij}$.

После нормировки сумма (7) переписывается в виде

$$\varphi_N(x,y)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=j_1(i)}^{j_2(i)}C_{ij}\alpha_i(x)\beta_j(y)\ . \tag{8}$$

Каждый постоянный коэффициент C_{ij} линейной комбинации (8) ортонормированных функций сеточного Лагранжева базиса конечномерного подпространства, связанного с построенной двумерной сеткой, равен значению функции $\varphi(x,y)$ в узле (x_i,y_j) сетки. Поэтому граничные условия $\varphi|_{\partial S}=0$ удовлетворяются, если те коэффициенты C_{ij}, которые соответствуют узлам, связанным с границей ∂S, приравниваются нулю. После такого выполнения главных граничных условий линейная комбинация (8) записывается следующим образом

$$\varphi_N(x,y)=\sum_{i=N_1}^{N_2}\sum_{j=j_1^*(i)}^{j_2^*(i)}C_{ij}\alpha_i(x)\beta_j(y)=\sum_{j=M_1}^{M_2}\sum_{i=i_1^*(j)}^{i_2^*(j)}C_{ij}\alpha_i(x)\beta_j(y)\ , \tag{9}$$

где $N_1,N_2,j_1^*,j_2^*,M_1,M_2,i_1^*,\ i_2^*-$натуральные числа такие что

$$1\le N_1\le i_1^*<i_2^*\le N_2\le N,\quad 1\le M_1\le j_1^*<j_2^*\le M_2\le M\ .$$

Для определения коэффициентов C_{ij} приближенного аналитического решения (9) краевой задачи (5) используются проекционные условия метода Бубнова-Галеркина, в рамках краевой задачи (5) совпадающие с условиями метода Ритца, а именно

$$\iint_S (-a^2 \Delta\varphi_N - \lambda\varphi_N)\alpha_m(x)\beta_n(y)dS = 0$$
$$(m = N_1,...,N_2;\ n = j_1^*(m),...,j_2^*(m)). \qquad (10)$$

После перехода в (10) от двойных интегралов, подынтегральные функции которых – слагаемые оператора Лапласа, к повторным интегралам с учетом того, что базисные финитные функции, соответствующие внутренним узлам сетки, имеют в узлах сетки, лежащих на границе ∂S, нулевые значения, получаем

$$a^2 [\int_A^B (\int_{C(x)}^{D(x)} \sum_{i=N_1}^{N_2} \sum_{j=j_1^*(i)}^{j_2^*(i)} C_{ij}\alpha_i^/(x)\beta_j(y)\alpha_m^/(x)\beta_n(y)dy)dx +$$

$$+ \int_C^D (\int_{A(y)}^{B(y)} \sum_{j=M_1}^{M_2} \sum_{i=i_1^*(j)}^{i_2^*(j)} C_{ij}\alpha_i(x)\beta_j^/(y)\alpha_m(x)\beta_n^/(y)dx)dy] -$$

$$- \iint_S \lambda \sum_{i=N_1}^{N_2} \sum_{j=j_1^*(i)}^{j_2^*(i)} C_{ij}\alpha_i(x)\beta_j(y)\alpha_m(x)\beta_n(y)dS = 0. \qquad (11)$$

Сформирована однородная система линейных алгебраических уравнений, неизвестными в которой являются коэффициенты C_{ij}. Эта система всегда имеет тривиальное решение. Те значения параметра λ, при которых она имеет нетривиальные решения, являются собственными значениями проекционно-сеточного оператора, полученного с помощью проекционного алгоритма Бубнова-Галеркина на основе оператора Лапласа, а также собственными значениями краевой задачи (5), записанной в форме системы уравнений (11). С учетом ортогональности используемых финитных базисных функций система уравнений (11) записывается в виде

$$a^2\left[\int_A^B \sum_{i=N_1}^{N_2} C_{in}\alpha_i^{/}(x)\alpha_m^{/}(x)dx + \int_C^D \sum_{j=M_1}^{M_2} C_{mj}\beta_j^{/}(y)\beta_n^{/}(y)dy\right] - \lambda C_{mn} = 0 \quad (12)$$

или

$$MX - \lambda X = 0,$$

где M - квадратная матрица системы уравнений, X - матрица-столбец, компоненты которой - неизвестные коэффициенты C_{ij}. Пара индексов (m,n) определяет номер уравнения системы и номер строки матрицы M, связанные с индексами функции, на которую проецируется уравнение (1), а пара индексов (i,j) – номер неизвестного коэффициента C_{ij} и номер столбца матрицы, характеризуемый индексами соответствующей функции линейных комбинаций (9). Если для строки (m,n) матрицы взять значения второй пары индексов $(i=k, j=l)$ такие, что $N_1 \le k \le N_2; j_1^*(m) \le l \le j_2^*(m),$ то элемент M_{mnkl} матрицы M окажется равным ее элементу M_{klmn}, поскольку такова структура интегральных коэффициентов уравнений (12) системы. Таким образом, матрица M - вещественная и симметричная, а следовательно [14, с. 134-142] все собственные значения и собственные векторы этой матрицы имеют вещественные значения, причем все ее собственные векторы линейно-независимы и попарно ортогональны, в том числе и в случае, когда есть кратные собственные значения. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_K$ - собственные значения, найденные в результате решения характеристического уравнения системы (12), $C_{ij}^{(k)}$ – соответствующие им компоненты $k-$го собственного вектора $X^{(k)}$, то есть одного из нетривиальных решений систем уравнений (10) - (12). Собственные значения положительны, поскольку матрица M - не только симметричная и вещественная, но и положительно определенная в силу того, что эта матрица возникла в проекционных условиях на основе скалярного произведения, примененного к положительно определенному, в случае рассматриваемого граничного условия, оператору $(-L) = (-a^2 \Delta)$.

Теорема 1. *Функция*

$$u^{(K)}(x,y,t) = \sum_{k=1}^{K} [(A_k \cos\sqrt{\lambda_k}t + B_k \sin\sqrt{\lambda_k}t) \sum_{i=N_1}^{N_2} \sum_{j=j_1^*(i)}^{j_2^*(i)} C_{ij}^{(k)} \alpha_i(x) \beta_j(y)],$$

(13)

в которой

$$A_k = \frac{1}{\left\|\varphi_N^{(k)}\right\|^2} \iint_S f(x,y) \varphi_N^{(k)}(x,y) dS, \qquad (14)$$

$$B_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}\left\|\varphi_N^{(k)}\right\|^2} \iint_S F(x,y) \varphi_N^{(k)}(x,y) dS, \qquad (15)$$

удовлетворяет уравнениям (5) в проекционной форме (10), уравнению (6), а также граничному условию и двум начальным условиям (1), то есть является приближенным аналитическим решением задачи (1) в случае области с криволинейной границей. При каждом фиксированном значении времени эта сумма представляет собой конечный обобщенный ряд Фурье по собственным функциям краевой задачи в проекционной форме.

Доказательство. Сумма

$$\varphi_N^{(k)}(x,y) = \sum_{i=N_1}^{N_2} \sum_{j=j_1^*(i)}^{j_2^*(i)} C_{ij}^{(k)} \alpha_i(x) \beta_j(y)$$

является элементом множества H_N - линейной оболочки функций $\alpha_i(x)\beta_j(y)$, связанных с указанной сеткой и удовлетворяющих граничному условию, а также является нетривиальным решением системы уравнений (10), удовлетворяющим граничному условию (5) и соответствующим собственному значению λ_k, то есть $\varphi_N^{(k)}(x,y)$ - собственная функция краевой задачи (5) в проекционной форме (10) - (12).

Рассмотрим уравнение (6) после подстановки в него любого найденного положительного собственного значения

$$\frac{\partial^2\psi(t)}{\partial t^2} + \lambda_k\psi(t) = 0 .$$

Общее решение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$\psi_k(t) = A_k \cos\sqrt{\lambda_k}\,t + B_k \sin\sqrt{\lambda_k}\,t ,$$

где A_k, B_k – неизвестные постоянные коэффициенты.

Следовательно, сумма

$$\sum_{k=1}^{K}\psi_k(t)\varphi_N^{(k)}(x,y) =$$

$$= \sum_{k=1}^{K}[(A_k \cos\sqrt{\lambda_k}\,t + B_k \sin\sqrt{\lambda_k}\,t)\sum_{i=N_1}^{N_2}\sum_{j=j_1^*(i)}^{j_2^*(i)} C_{ij}^{(k)}\alpha_i(x)\beta_j(y)] \qquad (16)$$

удовлетворяет уравнению (5) в проекционной форме (10) - (12), уравнению (6), а также граничному условию (5). Остается обеспечить выполнение начальных условий. Подстановка суммы (16) в первое начальное условие (1) дает

$$\sum_{k=1}^{K} A_k \varphi_N^{(k)}(x,y) = f(x,y)$$

Откуда, умножая обе части на $\varphi_N^{(r)}(x,y)$, интегрируя по области S и используя ортогональность собственных функций, имеем

$$A_k = \frac{1}{\left\|\varphi_N^{(k)}\right\|^2} \iint_S f(x,y)\varphi_N^{(k)}(x,y)dS\,.$$

Подстановка суммы (16) во второе начальное условие (1) дает

$$\sum_{k=1}^{K} \sqrt{\lambda_k} B_k \varphi_N^{(k)}(x,y) = F(x,y)\,.$$

Умножение обеих частей на $\varphi_N^{(r)}(x,y)$ и интегрирование по области S приводит к

$$B_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}\left\|\varphi_N^{(k)}\right\|^2} \iint_S F(x,y)\varphi_N^{(k)}(x,y)dS\,.$$

Таким образом, сумма (16), коэффициенты которой определяются формулами (14), (15), удовлетворяет уравнениям (5) в проекционной форме (10), уравнению (6), а также граничному условию (5) и двум начальным условиям (1), то есть является приближенным аналитическим решением задачи (1) в случае области с криволинейной границей. Сумма

$$u^{(K)}(x,y,t) = \sum_{k=1}^{K} [(A_k \cos\sqrt{\lambda_k}t + B_k \sin\sqrt{\lambda_k}t) \sum_{i=N_1}^{N_2} \sum_{j=j_1^*(i)}^{j_2^*(i)} C_{ij}^{(k)} \alpha_i(x)\beta_j(y)]$$

при каждом фиксированном значении времени представляет собой конечный обобщенный ряд Фурье по собственным функциям краевой задачи в проекционной форме. *Доказательство завершено.*

3. Сходимость метода

Теорема 2. *Приближенные собственные функции* $\varphi_N^{(k)}(x,y)$ *сходятся к точным собственным функциям* $\varphi^{(k)}(x,y) \in W_2^1(\overline{S})$, *удовлетворяющим граничному условию (5), то есть*

$$\left\| \varphi^{(k)} - \varphi_N^{(k)} \right\|_{W_2^1(S)}^2 -> 0 \quad при \quad N \to \infty .$$

Доказательство. Условие стационарности $\delta\Phi = 0$ функционала

$$\Phi(\varphi^{(k)}) = \iint_S [a^2(\overline{\nabla}\varphi^{(k)})^2 - \lambda_k(\varphi^{(k)})^2] dS ,$$

где $\overline{\nabla}$ - набла-оператор, при условии, что варьирование функционала проводится на множестве функций, удовлетворяющих главному граничному условию (5), равносильно краевой задаче (5). Значение второй вариации функционала в его стационарной точке - положительное, а следовательно, функционал имеет в стационарной точке минимум и поэтому решение вариационной задачи, а следовательно и краевой задачи (5) является единственным. Кроме того, функционал имеет в стационарной точке $\varphi^{(k)}$ значение равное нулю, так как на множестве функций $W_2^1(\overline{S})$, удовлетворяющих граничному условию,

$$\Phi(\varphi^{(k)}) = -\iint_S [a^2 \Delta\varphi^{(k)} + \lambda_k \varphi^{(k)}] \varphi^{(k)} dS = 0 .$$

Функционал для любой функции w множества $W_2^1(\overline{S})$, удовлетворяющей граничному условию, равен

$$\Phi(w) = \iint_S [a^2(\overline{\nabla} w)^2 - \lambda_k (w)^2]dS =$$

$$= \iint_S [a^2(\overline{\nabla}(\varphi^{(k)} - w))^2 - \lambda_k(\varphi^{(k)} - w)^2]dS =$$

$$= [\varphi^{(k)} - w, \varphi^{(k)} - w] - \lambda_k(\varphi^{(k)} - w, \varphi^{(k)} - w)$$

- разности энергетического скалярного произведения

$$[v_1, v_2] = \iint_S a^2(\overline{\nabla} v_1) \bullet \overline{\nabla} v_2 \, dS$$

и скалярного произведения

$$(v_1, v_2) = \iint_S v_1 v_2 \, dS .$$

Таким образом, задача отыскания точной собственной функции $\varphi^{(k)}$ свелась к задаче минимизации

$$\Phi(\varphi^{(k)}) = \min_{\forall w \in W_2^1(\overline{S})} \Phi(w) = 0 \quad (17)$$

на множестве функций w, удовлетворяющих граничному условию.

Поскольку

$$|\Phi(w)| = \left|[\varphi^{(k)} - w, \varphi^{(k)} - w] - \lambda_k(\varphi^{(k)} - w, \varphi^{(k)} - w)\right| \le$$

$$\le \left|[\varphi^{(k)} - w, \varphi^{(k)} - w]\right| + \lambda_k \left|(\varphi^{(k)} - w, \varphi^{(k)} - w)\right|,$$

то задача минимизации (17) сводится к задаче теории аппроксимации

$$\left\|\varphi^{(k)} - \varphi_N^{(k)}\right\|^2_{W_2^1(S)} = \min_{\forall w \in H_N \subset W_2^1(\overline{S})} \left\|\varphi^{(k)} - w\right\|^2_{W_2^1(S)},$$

то есть к задаче аппроксимации точных собственных функций $\varphi^{(k)}(x,y)$ линейными комбинациями $\varphi_N^{(k)}(x,y)$ ортогональных финитных функций. Такая задача решена в [12, 13], где имеются соответствующие теоремы об аппроксимации, определяющие точность аппроксимации и скорость сходимости, зависящие от типа конкретных систем ортогональных базисных систем функций. *Доказательство завершено.*

В [12, стр. 129-134] показано, что при увеличении числа узлов сетки области S, то есть при увеличении числа используемых базисных ортогональных финитных функций, приближенные собственные частоты $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_K$ сходятся к соответствующим по номерам точным собственным частотам краевой задачи (5). При увеличении числа узлов сетки области S приближенные решения $\varphi_N^{(k)}(x,y)$ краевой задачи (5), то есть приближенные собственные функции этой задачи, сходятся к ее точным решениям - собственным функциям $\varphi^{(k)}(x,y)$. При этом неограниченно возрастает число собственных значений и собственных функций краевой задачи в проекционной форме, а следовательно, сумма по k от 1 до K в пределе переходит в бесконечный ряд по k от 1 до ∞, который при всяком значении $t>0$ является бесконечным рядом Фурье. Такой ряд является единственным решением задачи (1), что следует из теоремы [15, стр. 88-91], основанной на теореме Стеклова [15, стр. 87]. Отличие данного метода решения начально-краевых задач для областей с криволинейными границами от других методов, например, от метода конечных элементов [11] состоит в том, что в данном методе определяемая его алгоритмом последовательность конечных рядов Фурье (13) в каждый фиксированный момент времени сходится к соответствующему бесконечному ряду Фурье, сформированному на основе точных собственных функций $\varphi^{(k)}(x,y)$ и представляющему собой существующее точное решение задачи (1), определить которое не удается.

Следовательно, эти конечные ряды Фурье представляют собой аналитические приближенные решения задачи (1) для области с криволинейной границей, которые при увеличении числа узлов сетки неограниченно близко подходят к точному решению этой задачи - бесконечному ряду Фурье, не только по количественным критериям, но по своей аналитической структуре. Метод дает в форме ортогональных рядов – конечных рядов Фурье, сколь угодно точные приближенные аналитические решения задачи (1) для областей с криволинейной границей, структуры которых аналогичны структуре точного решения, и в этом смысле метод приводит к точному аналитическому решению после того, как необходимая точность искомого решения задана.

Литература

1. Э. А. Гасымов, А. О. Гусейнова, У. Н. Гасанова, “Применение обобщенного метода разделения переменных к решению смешанных задач с нерегулярными граничными условиями”, *Ж. вычислит. матем. и матем. физ.*, **56**:7 (2016), 1335–1339.

2. И. С. Савичев, А. Д. Чернышев, “Применение метода угловых суперпозиций для решения контактной задачи о сжатии упругого цилиндра”, *Изв. РАН. МТТ,* **3** (2009), 151-162.

3. А. П. Хромов, М. Ш. Бурлуцкая, “Классическое решение методом Фурье смешанных задач при минимальных требованиях на исходные данные”, *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, **14**:2 (2014), 171–198

4. В. Л. Колмогоров, В. П. Федотова, Л. Ф. Спевак, Н. А. Бабайлов, В. Б. Трухин, “Решение нестационарных температурных и термомеханических задач методом разделения переменных в вариаци-

онной постановке”, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, **42** (2006), 72–75.

5. Ю. И. Малов, Л. К. Мартинсон, К. Б. Павлов, “ Решение некоторых смешанных краевых задач гидродинамики проводящих сред методом разделения переменных”, *Ж. вычислит. матем. и матем. физ.*, **12**:3 (1972), 627–638.

6. М. Ш. Исраилов, “Дифракция акустических и упругих волн на полуплоскости при разнотипных граничных условиях”, *Изв. РАН. МТТ*, **3** (2013), 121-134.

7. Anders Vretblad, *Fourier analysis and its applications,* Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelber, 2003.

8. А. Б. Усов, “Конечно-разностный метод решения уравнений Навье–Стокса в переменной области с криволинейными границами”, *Ж. вычислит. матем. и матем. физ.*, **48**:3 (2008), 491–504.

9. П. А. Крутицкий, “ Первая начально-краевая задача для уравнения гравитационно-гироскопических волн в многосвязной области ”, *Ж. вычислит. матем. и матем. физ.*, **37**:1 (1997), 117–128.

10. М. И. Чебаков, “Некоторые динамические и статические контактные задачи теории упругости для кругового цилиндра конечных размеров”, *Прикл. матем. и мех.*, **44**:5 (1980), 923-933.

11. Г. Стренг, Дж. Фикс, *Теория метода конечных элементов*, Мир, М., 1977.

12. В. Л. Леонтьев, *Ортогональные финитные функции и численные методы*, УлГУ, Ульяновск, 2003.

13. В. Л. Леонтьев, Н.Ч. Лукашанец, “Сеточные базисы ортогональных финитных функций”, *Ж. вычислит. матем. и матем. физ.*, **39**:7 (1999), 1158–1168.

14. М. И. Клиот-Дашинский, *Алгебра матриц и векторов*, Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1974.

15. В. Я. Арсенин, *Методы математической физики и специальные функции*, Главная редакция физико-математической литературы изд-ва “Наука”, М., 1974.