Решение задач с параметрами

Макарова Наталья Владимировна
4 курс, Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Елабужский институт, факультет математики и естественных наук
Сафиулин Роман Мадарисович
4 курс, Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Елабужский институт, факультет математики и естественных наук

В современных условиях ФГОС решение задач с параметрами играют большую роль в формировании логического и математического мышления у учащихся. Одни из самых сложных задач в курсе алгебры являются уравнения и неравенства с параметрами.

При решение задач такого рода недостаточно применять формулы, а необходимо понимать закономерности, анализировать конкретные случаи на основе известных задач, уметь объединять известные ранее частные случаи в единый результат. Поэтому решение задач с параметрами носит исследовательский характер. То есть решение задач такого типа и написание ответа требует исследования, что не формулируется в условие задачи. В связи с этим и возникают некоторые трудности у учащихся при решении задач с параметрами.

Задачи с параметрами встречаются на выпускных экзаменах в школе, поэтому учащимся необходимо отработать различные приемы решения задач с параметрами. В данной статье рассмотрены различные задачи с параметрами.

1) Линейные уравнения с параметрами. Решение таких уравнений заключается в нахождении x через параметр a с дальнейшим анализом этого решения. Нужно исследовать все значения a, которые отвечают исходному уравнению и дают действительные значения переменной x.

Задача 1.

При каком a уравнение $2a(a-3)x = a-3$ не имеет решений?

Решение.

Перепишем уравнение в виде $(a-3)(2ax-1) = 0$.

Видим, что при $a = 3$ переменная x может принимать любые значения. Значение $a = 0$ приводит к уравнению $0 \cdot x = -3$. Оно не имеет решений.

Если $a \neq 0$ и $a \neq 3$, то из уравнения получается $x = \frac{1}{2a}$.

Ответ: $a = 0$

Задача 2. Решить уравнение $px = 2x - 3$.

Решение.

Упростим уравнение и выразим *x* через *p*.

$$px = 2x - 3;$$

$$px - 2x = -3;$$

$$x(p-2) = -3;$$

$$x = \frac{-3}{p-2}.$$

Из полученного уравнения видно, что при $p = 2$ уравнение не имеет решений, а если $p \neq 2$, то переменная x принимает любые значения.

Ответ: Если $p \neq 2$, то *x* – любое.

2) Квадратичные уравнения с параметрами. При решении таких уравнений используются известные формулы для корней квадратного уравнения, теорема Виета и условия существования действительных решений – знак дискриминанта.

Задача 3.

Решить уравнения $ax^2 + 2(a+1)x + 2a = 0$.

Решение.

Рассмотрим случай $a = 0$, уравнение приобретает вид: $2x = 0$, то есть $x = 0$. Пусть теперь $a \neq 0$, найдем дискриминант квадратного уравнения, в данном случае $D = (a+1)^2 - 2a^2 = -a^2 + 2a + 1$.

Уравнение $D = 0$ имеет корни: $a = 1 - \sqrt{2}$ и $a = 1 + \sqrt{2}$. Графиком $D(a) = -a^2 + 2a + 1$ является парабола, ветви которой направлены вниз.

Когда $D < 0$, то есть $a < 1 - \sqrt{2}$ или $a = 1 + \sqrt{2}$, то уравнение решений не имеет.

Когда $D = 0$, то при $a = 1 - \sqrt{2}$ и при $a = 1 + \sqrt{2}$ исходное уравнение имеет один корень $x = -\frac{a+1}{a}$. При $a = 1 - \sqrt{2}$ получаем $x = -\sqrt{2}$, при $a = 1 + \sqrt{2}$ получаем $x = \sqrt{2}$.

Когда $D > 0$, то есть $a \in \left(1 - \sqrt{2};\ 0\right) \cup (0; 1 + \sqrt{2})$ уравнение имеет два корня

$$x = \frac{-(a+1) \pm \sqrt{D}}{a}.$$

Ответ: $a \in \left(-\infty; 1 - \sqrt{2}\right)$ корней нет; $a = 1 + \sqrt{2}$, то $x = \sqrt{2}; a \in \left(1 - \sqrt{2}; 0\right)$, то $x = \frac{-(a+1)+\sqrt{-a^2+2a+1}}{a}, x = \frac{-(a+1)-\sqrt{-a^2+2a+1}}{a}$; $a = 0$, то $x = 0$; $a \in \left(0; 1 + \sqrt{2}\right)$, то $x = \frac{-(a+1)+\sqrt{-a^2+2a+1}}{a}, x = \frac{-(a+1)-\sqrt{-a^2+2a+1}}{a}$; $a = 1 + \sqrt{2}$, то $x = -\sqrt{2}$; $a \in \left(1 + \sqrt{2}; +\infty\right)$ коней нет.

3) При решении уравнений с параметрами, содержащие модуль, используются следующие правила раскрытия модуля:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), \text{если } f(x) \geq 0 \\ -f(x), \text{если } f(x) \geq 0 \end{cases}.$$

Задача 4.

Сколько корней в зависимости от параметра a имеет уравнение

$$x^2 + 5(x+1) + 3|x - a| + a = 0?$$

Решение.

Изобразим на плоскости $f(x, a)$ все точки, удовлетворяющие данному уравнению.

Если $x \geq a$, то $a = \frac{1}{2}(x^2 + 8x + 5)$, если $x < a$, то $a = -\frac{1}{4}(x^2 + 2x + 5)$. Решив данную систему: $\begin{cases} a = \frac{1}{2}(x^2 + 8x + 5) \\ a = -\frac{1}{4}(x^2 + 2x + 5) \end{cases}$, нашли точки пересечения парабол $A(-5; -5)$ и $B(-1; -1)$, которые лежат на прямой $a = x$, график изображен на рисунке 1.

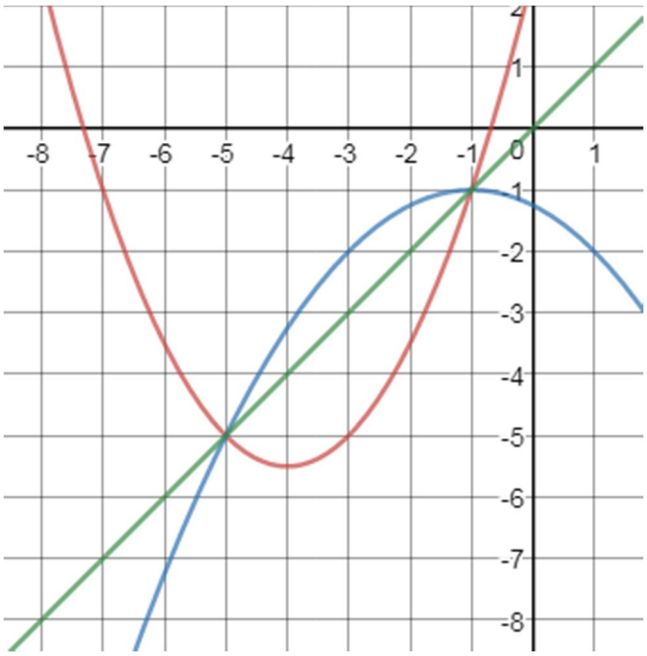

Рисунок 1. График к задаче 5.

Ответ: при $a = -1$ или $a = -\frac{11}{2}$ уравнение имеет единственное решение, при $-\frac{11}{2} < a < -1$ уравнение имеет два решения (горизонтальная прямая, соответствующая этим значениям параметра, пересекает график дважды), при $a < -\frac{11}{2}$ или $a > -1$ уравнение не имеет решений.