УДК 511.52

«ВЕЛИКАЯ» ТЕОРЕМА ФЕРМА В СВЕТЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

© В.А. Мартынов

Martynov V.A. Fermat's 'great' theorem in the light of analytical geometry. The equation of Fermat's last theorem in the light of analytical geometry is a surface of the n's order. It is shown that the solution of the equation is restricted by the dimension of the space in which these surfaces are placed. The quantity of integers (co-ordinates) in Fermat's equation should always be bigger than the degree in which they are raised.

Теория алгебраических чисел является прекрасным созданием математики XIX века. Главные ее идеи легли в основу современной общей алгебры и тем самым оказали стимулирующее влияние на развитие всей математики. Исторически эта теория создавалась, в том числе, в связи с желанием многих поколений математиков доказать «великую» теорему Ферма.

Один из величайших математиков Пьер Ферма жил в XVIII веке. Он заложил основы **аналитической геометрии**, нашел общий метод разыскания максимумов и минимумов, но главные его результаты получены в области теории чисел.

Свои теоретико-числовые результаты Ферма не публиковал. Они известны из его писем, а также из бумаг, оставшихся после его смерти. Как правило, доказательства Ферма до нас не дошли. Эти доказательства были восстановлены последующими математиками, в основном Эйлером. Некоторые свои утверждения Ферма сопровождал пометкой, что он не располагает удовлетворительным их доказательством. Впоследствии выяснилось, что часть этих утверждений была ошибочна. Однако во всех случаях, когда Ферма определенно утверждал, что он доказал то или иное, впоследствии удавалось это утверждение доказать [1]. Замечательным исключением является так называемая «Большая теорема Ферма» (или «Великая теорема Ферма»), утверждающая, что не существует отличных от нуля целых чисел x, y и z, для которых имеет место равенство

$$x^n + y^n = z^n,$$

где $n > 2$. (Общеизвестно, что при $n = 2$ такие числа существуют, например, 3, 4, 5).

В бумагах Ферма было найдено доказательство этой теоремы при $n = 4$.

Относительно же общего случая любого $n > 2$ Ферма лишь написал (на полях «Арифметики» Диофанта), что он нашел «поистине замечательное доказательство» этого факта, но поля слишком малы, чтобы его уместить. В настоящее время, кроме показателя 4, в США с помощью современного математического аппарата и ЭВМ было найдено доказательство для всех $n > 2$. Однако теорему Ферма так и не удалось доказать элементарными методами, которыми располагала математика в то время, хотя сейчас это уже не имеет принципиально важного значения. Но по-прежнему имеется научно-историческое значение, и поэтому в данной работе предпринимается попытка найти соответствующие подходы для ее решения элементарными методами.

Можно попытаться угадать ход размышлений великого математика, задав при этом вопрос: почему усилия многих поколений математиков и появление современных математических методов и мощных ЭВМ так долго не приводило к доказательству теоремы? Возможно, на всех исследователей повлияло то, что найденное Ферма доказательство теоремы при $n = 4$ с помощью теории чисел само собой подразумевало искать общее доказательство для всех $n > 2$ также и только при помощи теории чисел.

В то же время Ферма, как основатель аналитической геометрии, мог бы получить это «поистине замечательное доказательство», рассмотрев пространственно-геометрические ограничения самого трехмерного пространства, препятствующие равенству этого, являющегося геометрическим, уравнения при всех отличных от нуля целых числах больше двух.

В связи с этим рассмотрим данное уравнение с позиций аналитической геометрии в части построения поверхностей n-го порядка в трехмерном евклидовом пространстве (координаты x; y; z).

1. Поверхности первого порядка при $n = 1$:

$$x^1 + y^1 = z^1;$$

$x^1 + y^1 - z^1 = 0$ – уравнение плоскости.

В этом случае количество координат x; y; z равно трем, что больше целого числа или степени, в которую они возведены (1). Следовательно, плоскость имеет мерность в пространстве (1) меньшую, чем само евклидово пространство (3), что позволяет найти такие значения x; y; z, при которых данное уравнение имеет решение (это, например, 1; 1; 2 соответственно).

2. Поверхности второго порядка при $n = 2$:

$x^2 + y^2 - z^2 = 0$ – уравнение для конуса второго порядка.

Конус второго порядка также имеет мерность в пространстве (2) меньшую, чем само евклидово пространство (3), что позволяет найти такие значения x; y; z, при которых данное уравнение имеет решение (это, например 3; 4; 5 соответственно).

3. Алгебраические поверхности n-го порядка при $n > 2$:

$$x^n + y^n - z^n = 0.$$

При $n = 3$ анализ показывает, что уравнение третьего порядка для трех координат (x; y; z) имеет точки максимума и минимума и экстремум равными нулю. Это означает, что поверхность третьего порядка в трехмерном пространстве с координатами (x; y; z) выглядит как точка пересечения координат. Анализ для трехмерного пространства дает точку потому, что вся поверхность третьего порядка располагается в четырехмерном пространстве, а в трехмерном виден только ее след в виде точки. Необходимо изменить уравнение и дополнить его четвертым целым числом или координатой, чтобы найти значения этих целых чисел или координат, при которых новое уравнение будет иметь решение. Таким образом, мерность евклидова пространства не позволяет найти такие значения x; y; z, при которых данное уравнение имеет решение. Также, например, куб выглядит из двумерного пространства как плоскость и, не зная его истинной геометрии, было бы крайне сложно гипотетическому двумерному существу догадаться, что это куб.

В свете вышеизложенного отметим следующее. Чтобы получить решение подобных уравнений для целых чисел при $n > 2$, количество целых чисел или координат пространства, в том числе неевклидова, в уравнениях такого класса для алгебраических поверхностей n-го порядка (к которым относится и уравнение Ферма) должно быть больше положительного целого числа или степени, в которую эти целые числа или координаты возведены.

Например, мы показали, что уравнение

$$x^3 + y^3 = z^3$$

не имеет решения. Однако при переходе к четырехмерному пространству, то есть включив четвертое положительное целое число или координату (q) в уравнение Ферма, мы получим, что это новое уравнение при $n = 3$ имеет решение при соответствующей величине целых чисел или координат x; y; q; z – 3, 4, 5, 6:

$$x^3 + y^3 + q^3 = z^3;$$

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3.$$

Аналогичен подход к пятимерному пространству с пятью координатами или положительными целыми числами при $n = 4$:

$$x^4 + y^4 + q^4 + j^4 = z^4;$$

$$6^4 + 6^4 + 3^4 + 2^4 = 7^4$$

и так далее.

Таким образом, подводя некоторый итог, можно сказать, что не существует отличных от нуля целых чисел x, y и z, для которых имеет место равенство

$$x^n + y^n = z^n,$$

где $n > 2$, вследствие того, что на решение этого уравнения с точки зрения аналитической геометрии налагает ограничение размерность евклидова пространства.

Вышеуказанные геометрические и логические рассуждения и доводы нельзя назвать математическим доказательством, но, может быть. таким был ход рассуждений Ферма, и полученное им соответствующее математическое доказательство основывалось на них?

ЛИТЕРАТУРА

1. *Постников М.М.* Теорема Ферма. Введение в теорию алгебраических чисел. М.: Наука, 1978. 128 с.

Поступила в редакцию 7 мая 2003 г.