Свойства непрерывных функций

Тимиркаева А.В., Нигматуллина А.М.
1 курс, факультет ИТФ,
Елабужский институт КФУ,
Научный руководитель: Миронова Ю. Н.,
Кандидат физ.-мат. наук, профессор РАЕ,
Доцент кафедры математики и прикладной информатики
Елабужского института КФУ,
Казанский (Приволжский) федеральный университет.

Допустим, что функция y=f(x) определена в точке x_0 . Данная функция y=f(x) будет называться непрерывной в точке x_0, если существующий предел функции в данной точке будет равен значению функции в этой точке.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Данное равенство равносильно следующим условиям:

1) функция f(x) определена в точке x_0 и в окрестности точки x_0;
2) функция f(x) имеет предел при $x \to x_0$;
3) предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x) = f(x_0).$$

Отсюда следует, что когда мы находим предел непрерывной функции f(x), мы можем подставить в эту функцию его значение предела x_0 .

Также можно дать определение непрерывности функции по приращению аргумента и функции.

Допустим, что наша функция y=f(x) задана на интервале (a;b). Возьмем произвольную точку x_0 , принадлежащую данному интервалу. Для любой точки, принадлежащей этому интервалу разность $x-x_0$ будет называться приращением аргумента x в данной точке. Эта разность будет обозначаться как Δx: $\Delta x = x - x_0$. Отсюда $x = x_0 + \Delta x$.

Разность функций $f(x) - f(x_0)$ будет называться приращением функций f(x) в точке x_0 и обозначается Δy или $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

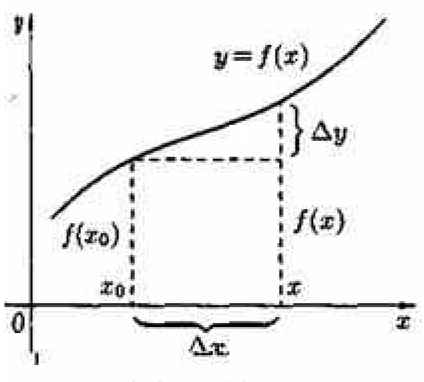

Рис.1

Приращения Δx и Δy бывают как положительными, так и отрицательными числами.
Второе определение непрерывности функции в точке: функция y=f(x) называется непрерывной в точке x_0, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

При исследовании непрерывности функции в точке допускается пользоваться либо первым, либо вторым отпределением.
Функция y=f(x) будет называться непрерывной на интервале (a,b), если она непрерывна во всех точках этого интервала.
Рассмотрим основные теоремы о непрерывных функциях.
Из теорем о пределах следуют теоремы о непрерывности функции.

Теорема 1
Сумма, произведение и частное двух непрерывных функций являются непрерывной функцией.
Исключение: для частного - кроме значений аргумента, где делитель равен нулю.

Допустим, что фунукции f(x) и φ(x) непрерывны на некотором множестве X и x_0 – любое значение из этого множества. Докажем непрерывность произведения F(x) = f(x) $\cdot\varphi$(x). Применим теорему о пределе произведения, получим:
$$\lim_{x\to x_0} F(x) = \lim_{x\to x_0}\big(f(x)\cdot\varphi(x)\big) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0}\varphi(x) = f(x_0)\cdot\varphi(x_0) = F(x_0).$$
Таким образом, $\lim\limits_{x\to x_0} F(x) = F(x_0)$, что доказывает непрерывность функции f(x)$\cdot\varphi$(x) в точке x_0.

Пример 1.

Используя определение, покажем, что функция$y = \frac{x+1}{x^2+5}$ непрерывна во всей области определения.Возьмем произвольную точку x_0. Вычислим предел функции в этой точке:

$\lim_{x\to x_0} \frac{x+1}{x^2+5} = \frac{\lim_{x\to x_0}(x+1)}{\lim_{x\to x_0}(x^2+1)} = \frac{\lim_{x\to x_0}(x)+1}{\lim_{x\to x_0}(x^2)+5} = \frac{x_0+1}{x_0^2+5}$. Теперь вычислим значение функции в точкеx_0. $y(x_0) = \frac{x_0+1}{x_0^2+5}$.

Таким образом, $\lim_{x\to x_0} y(x) = y(x_0)$, следовательно, функция $y = \frac{x+1}{x^2+5}$ непрерывна в точке x_0.

Пример 2.

Найти предел $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x}{1-\cos 2x}$

Решение:

Т.к.функция $\frac{1+\sin x}{1-\cos 2x}$ непрерывна в точке $x = \frac{\pi}{2}$, т.е. $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, то переходя к пределу получаем:

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x}{1-\cos 2x} = \frac{1+\sin\frac{\pi}{2}}{1-\cos 2x} = \frac{1+1}{1-(-1)} = 1.$

Теорема 2

Если функция y=f(x) непрерывна и строго монотонна на отрезке [a;b] оси OX, тогда обратная функция y= φ(x) будет тоже непрерывной и монотонной на отрезке [c;d] оси OУ

Функции arcsinx, arctgx, arccosx, arcctgx(по теореме 3) будут непрерывными при всех значениях x.

Если функцию можно задать одной формулой, которая содержит конечное число арифметических действий и суперпозиций, т.е. операции взятия функции от функции, основных элементарных позиций, то такую функцию можно назвать элементарной.

Отсюда следует, что любая элементарная функция будет непрерывна в каждой точке, в которой она определена.

Пример 3.

Найти:

$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} 2^{ctgx}$

Решение: Функция 2^{ctgx} непрерывна в точке x=π/4, поэтому

$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} 2^{ctg\,x} = 2^{ctg\frac{\pi}{4}} = 2^1 = 2.$

Теорема 3

В случае, если функция непрерывна на отрезке [a;b], она будет достигать на данном отрезке наибольшего значения M и наименьшего значения m.

Функция y=f(x) (рис.2) непрерывна на отрезке [a;b]. Наибольшее значение M в точке x_1 , а наименьшее занчение mв точке x_2.

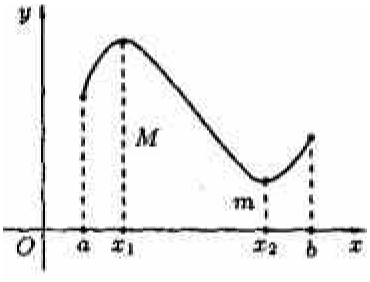

Рис.2

Следствие 1. *В случае, если функция непрерывна на отрезке, она будет ограничена на данном отрезке.*

Пример 4.

Исследовать функцию на наибольшее и наименьшее значение на заданном промежутке X. $f(x) = \frac{4}{3}x^3 - 4x_2,\ x \in [0; 2]$.

Решение. Исследуемая функция дифференцируема и непрерывна на отрезке, поэтому найдем производную $f'(x) = \frac{4}{3} \cdot 3x^2 - 4 = 4x^2 - 4$. Теперь найдём стационарные точки (в них производная обращается в нуль).

$4x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow 4(x-1)(x+1) = 0$,

$x_1 = 1, x_2 = -1$.

Точки $x_1 = 1, x_2 = -1$ - точки возможного экстремума. При этом $x_1 \in [0; 2]$, $x_2 \notin [0; 2]$. Найдём значения функции в точке $x_1 = 1$ и на концах отрезка и выберем среди них наибольшее и наименьшее значения. Так как $f(1) = \frac{4}{3} - 1 = -\frac{8}{3}$, $f(0) = 0$, $f(2) = \frac{4}{3} \cdot 2^3 - 4 \cdot 2 = \frac{32}{3} - 8 = \frac{8}{3}$, тогда получаем, что $y_{\text{наиб}} = f(2) = \frac{8}{3}$, $y_{\text{наим}} = f(1) = -\frac{8}{3}$.

Теорема 4

Если функция непрерывна на отрезке и принимает на его концах неравные значения f(a)=A и f(b)=B, то она принимает все промежуточные значения между A и B на данном отрезке.

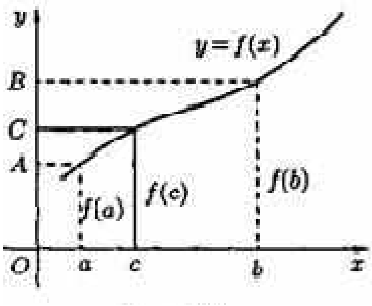

Рис.3.

Для любого числа C, заключенного между A и B, найдется точка c внутри этого отрезка такая, что f(c)=C. Прямая y=C пересечет график функции по крайней мере в одной точке.

Следствие 2. *Если функция y=f(x) непрерывна на отрезке [a,b] и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри отрезка [a, b] найдется хотя бы одна точка c, в которой данная функция f(x) обращается в нуль: f(c)=0.*

Геометрический смысл данной теоремы будет следующим: в случае, если график непрерывной функции будет переходить одной стороны оси OX на другую, то он будет пересекать ось OX (рис.4)

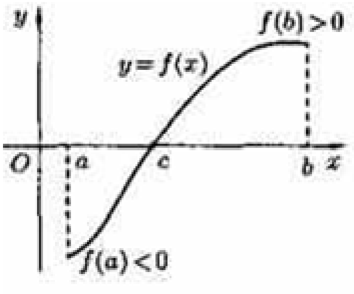

Рис.4

Список использованной литературы

1) Письменный Дмитрий. Конспект лекций по высшей математике. Москва «Айрис Пресс» - 2009 год.

2) Конев В.В. Статья «Пределы последовательностей и функций» [электронный ресурс]: URL: http://portal.tpu.ru/SHARED/k/KONVAL/Sites/Russian_sites/Calc1-ru/3/03.htm

3) Портал знаний [электронный ресурс]: URL: http://www.znannya.org/?view=nepreruvnost_fynctsuu

4) Тимиркаева А.В., Нигматуллина А.М. Исследования способов вычисления определителей // Материалы VIII Международной студенческой электронной научной конференции «Студенческий научный форум» URL: http://www.school-science.ru/2017/7/27707 (дата обращения: 09.12.2016).

5) Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. М., Высшая школа,1981, т.1,2; 1988, т.3.