# Свойства определенного интеграла

Латипова Айсылу
1 курс, факультет математики и естественных наук,
Елабужский институт КФУ,
Научный руководитель: Миронова Ю. Н.,
Кандидат физ.-мат. наук, профессор РАЕ,
Доцент кафедры математики и прикладной информатики
Елабужского института КФУ,
Казанский (Приволжский) федеральный университет.

Рассмотрим определенный интеграл функции $f(x)$ на $[a, b]$: $J = \int_a^b f(x)\, dx$ , $a$ - нижний, $b$ - верхний предел интегрирования. Здесь мы считаем $a < b$
Перечислим свойства определенного интеграла.
1) До сих пор в

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

мы считали $a < b$
**Определение**. *Для любой функции* $f(x)$ *положим*

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0,$$

*а для функции, интегрируемой на* $[a, b]$,

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx \ \ (a < b)$$

2) Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то она и на любом $[c, d] \subset [a, b]$ интегрируема.
3) Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, *c* – произвольная точка этого сегмента, то

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

Свойство 3) называется свойством *аддитивности определенного интеграла*.
Геометрический: площадь *P* равна сумме площадей $P_1$ и $P_2$.
**Замечание**: свойство 3) остается верным и тогда, когда точка *c* не лежит на $[a, b]$, а $f(x)$ интегрируема на $[a, c]$ или $[c, b]$.

4) Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то функция $k \cdot f(x)$, $k = const$, интегрируема на $[a,b]$ и

$$\int_a^b k\, f(x)\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx$$

5) Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$, то $f(x) + g(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и

$$\int_a^b (f+g)\, dx = \int_a^b f\, dx + \int_a^b g\, dx$$

6) Если $f(x) \geq 0$ и интегрируема на $[a,b]$, $a<b$ , то

$$\int_a^b f\, dx \geq 0$$

7) Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$, $a<b$, $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$, то

$$\int_a^b f\,(x) dx \leq \int_a^b g\,(x) dx$$

8) Если $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, $a<b$, то $|f(x)|$ интегрируема на $[a,b]$ и

$| \int_a^b f\,(x) dx \,| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$

Свойства определенного интеграла применяют при вычислении определенных интегралов.

**Пример 1**. Вычислить $\int_1^2 x^2\, dx$

Найдем одну из первообразных для функции $f(x) = x^2$

$\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} + \ c$ , т.е. $F(x) = \frac{x^3}{3}$

Тогда по формуле Ньютона-Лейбница

$\frac{x^3}{3}\ \Big|_1^2 = \frac{1}{3}(2^3 - 1^3) = \frac{1}{3}(8-1) = \frac{7}{3}$

Решение записывают в виде:

$\int_1^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\ |_1^2 = \frac{1}{3}(2^3-1) = \frac{7}{3}$

**Пример 2**. Вычислить $\int_0^{\pi/4} \sin 2x\,dx$

$\int_0^{\pi/4} \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\cos 2x\ |_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}(\cos(2\cdot\frac{\pi}{4}) - \cos 0) = \frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0) = \frac{1}{2}(0-1) = -\frac{1}{2}$

**Пример 3**. Вычислить $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = arctgx\ |_0^1 = arctg1 - arctg0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$

**Пример 4**. Вычислить $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(7-4x)^2}$

Произведем замену переменной:

$t = 7-4x,\ x = \frac{t}{4} - \frac{7}{4},$

$dx = -\frac{1}{4}dt$

$x = 1 \rightarrow t = 3$

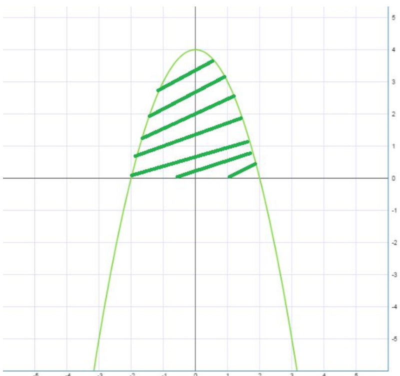
$x = -1 \rightarrow t = 11$

Тогда

$\int_{-1}^1 \frac{dx}{(7-4x)^2} = \int_{11}^3 \frac{-\frac{1}{4}}{t^2}dt = -\frac{1}{4}\int_{11}^3 t^{-2}dt = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{t}|\,_{11}^{3} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{11}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{11}{33} - \frac{3}{33}\right) = \frac{2}{33}$

**Пример 5**.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = 4 - x^2$ , $y = 0$



Решим уравнение

$4 - x^2 = 0$

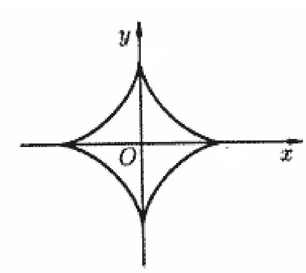
Парабола пересекает ось ОХ в точках

$x = \pm 2$

Используем формулу Р $= \int_{\alpha}^{\beta} y\,dx$.

Р $= \int_{-2}^{2}(4 - x^2)\,dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{2} = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) = \frac{16}{3} + \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$

**Пример 6**. Найти длину дуги астроиды, которая задана параметрически: $x = a\cos^{3} t$, $y = a\sin^{3} t$




Найдем длину дуги астроиды по формуле $S = \int_{\alpha}^{t} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt$

$S = 4\int_{0}^{\pi/4} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt$

$x_t' = (a\cos^{3} t)' = a\big(3cos^3t \cdot (-sint)\big)$

$y_t' = (asin^3t)' = a(3sin^2t \cdot cost)$

$x_t'^2 + y_t'^2 = 9a^2cos^4t \cdot sin^2t + 9a^2sin^4t \cdot cos^2t = 9a^2sin^2t \cdot cos^2t$

$S = 4\int_{0}^{\pi/4} \sqrt{9a^2sin^2t \cdot cos^2t}\ dt = 4 \cdot 3a\int_{0}^{\pi/4} sint \cdot cost\,dt = 2 \cdot 3a\int_{0}^{\pi/4} sin2tdt = 6a(-\frac{1}{2}cos2t)\Big|_{0}^{\pi/4} = 3a(-cos\pi + cos0) = 3a(1 + 1) = 6a$

Таким образом, мы рассмотрели свойства определенного интеграла, и некоторые задачи, решаемые при помощи свойств определенного интеграла.

## Список литературы:

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М., 1969 г.
2. Миронов Н.П. Лекции по математическому анализу (Интегральное исчисление для функции одной переменной). Пособие для студентов физико-математического факультета. Елабуга, 1999 год.
3. Матвеева А.Е., Макарова Н.В., Миронова Ю.Н. Интегрирование по частям как метод вычисления интегралов // Международный журнал экспериментального образования. 2016. № 3-1. С. 128-129. URL: http://www.expeducation.ru/ru/article/view?id=9687 .