Применение интегральной формулы Коши

Хайртдинова Г.Ф, Хайруллина Я.А.
Елабужский институт К(П)ФУ
Научный руководитель: Миронова Ю.Н.

Студенты в высших учебных заведениях учатся решать двойные, тройные интегралы, однако часто сталкиваются с трудностями при решении интегралов вида

$$\int_{\Gamma} \frac{z^2 dz}{z-4i}.$$

Для решения подобных интегралов целесообразно будет обратиться к теореме Коши:

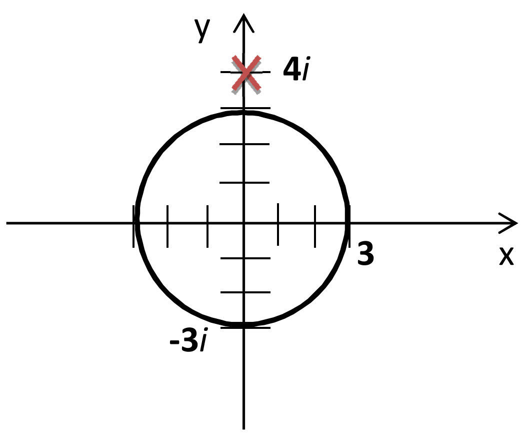
Теорема 1. *Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области G конечной плоскости и Γ – произвольный замкнутый контур в G, то* $\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$.

Теорема 2 (интегральная формула Коши). *Если функция $f(a)$ является аналитичной в односвязной области D и на ее контуре Γ, то для любой внутренней точки* $a \in D$

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a}dz. \qquad (1)$$

Применим эти теоремы для нахождения $\int_{\Gamma} \frac{z^2 dz}{z-4i}$, где Γ задана уравнением $|z| = 3$.

$f(z) = z^2, a = 4i, |z| = 3$



Мы видим, что точка $z = 4i$ лежит вне круга $|z| \leq 3$. Следовательно, подынтегральная функция является аналитической в круге $|z| \leq 3$.

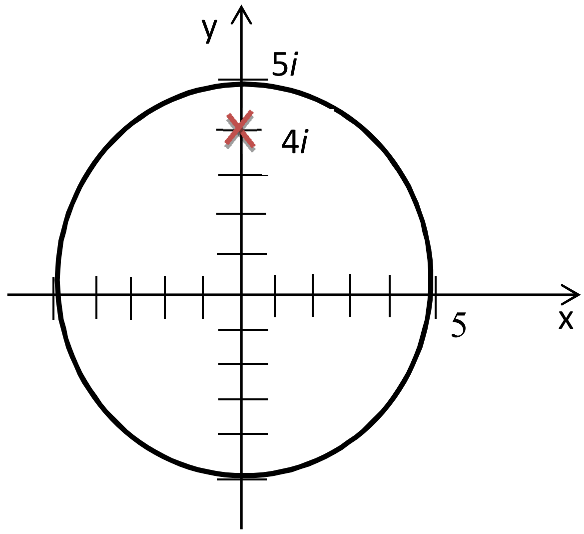
По интегральной теореме Коши:

$$\int\limits_{|z|=3} \frac{z^2dz}{z-4i} = 0.$$

Таким образом, студенты длительное время могут задумываться над решением данного интеграла, тогда как по интегральной теореме Коши можно легко справиться с этой задачей.

Всегда ли интеграл $\int_\Gamma \frac{z^2dz}{z-4i}$будет равен 0? Вычислим $\int_\Gamma \frac{z^2dz}{z-4i}$, где Г задана уравнением: $|z| = 5$.

$f(z) = z^2, a = 4i, |z| = 5$



По формуле Коши:

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a}dz = 2\pi i f(a).$$

В данном случае $|z| = 5$ охватывает точку $z = 4i$.

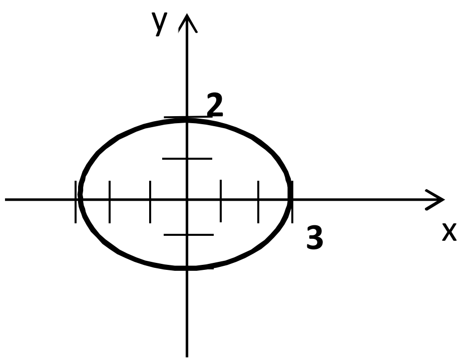
Получаем:

$$\int\limits_{|z|=5} \frac{z^2dz}{z-4i} = 2\pi i\ (4i)^2 = -32\pi i.$$

Таким образом, мы наблюдаем, что при решении $\int_\Gamma \frac{z^2dz}{z-4i}$ в ответе мы не всегда получаем ноль. Пользуясь теоремой Коши при нахождении подобных интегралов, необходимо учитывать, является ли данная функция аналитичной в точке *a.* Перед тем как приступить к вычислению интеграла, следует проверить, принадлежит ли точка *a* односвязной области D и ее контуру Г.

Так благодаря интегральной теореме Коши упрощается задача вычисления некоторых сложных на первый взгляд интегралов.

Пример 1. Вычислить $\int_C \frac{cosz}{z}dz$, где С: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}$=1.



В нашем интеграле $f(z) = cosz$,
$a = 0, \qquad f(a) = cos0 = 1.$

Односвязной областью С является эллипс с полуосями 3 и 2 соответственно, который охватывает точку z= 0.

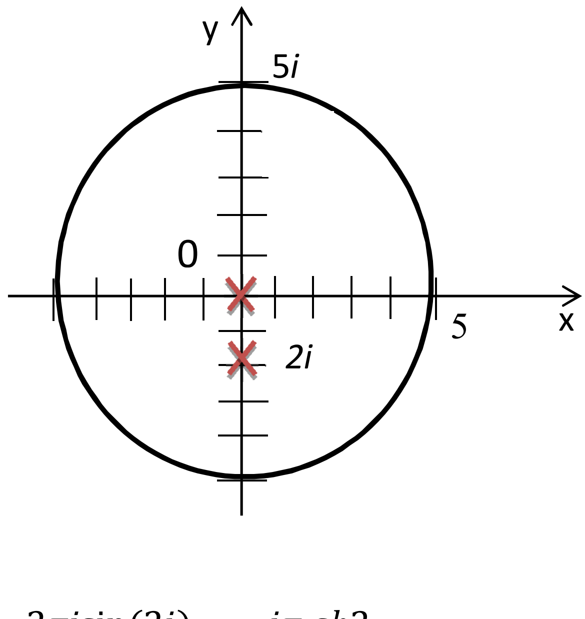
$$\int_C \frac{cosz}{z}dz = 2\pi i\, f(a) = 2\pi i \cdot 1 = 2\pi i.$$

Пример 2. Вычислить $\int_{|z|=5}\frac{sinz}{z(z+2i)}dz$

$$\frac{1}{z(z+2i)} = \frac{A}{z}+\frac{B}{z+2i};\ A = \frac{1}{2i} = -\frac{1}{2}i;\ \ B = -\frac{1}{2i} = \frac{1}{2}i;$$

$$\int_{|z|=5}\frac{sinz}{z(z+2i)}dz = -\frac{1}{2}i\int_{|z|=5}\frac{sinz}{z}dz + \frac{1}{2}i\int_{|z|=5}\frac{sinz}{z+2i}dz$$

Вычислим по формуле (1):



$$\int_{|z|=5}\frac{sinz}{z}dz = 2\pi i\ sin0 = 0$$

$$\int_{|z|=5}\frac{sinz}{z+2i}dz = 2\pi i\sin(-2i) = -2\pi i\sin(2i)$$

$$\int_{|z|=5}\frac{sinz}{z(z+2i)}dz = -\frac{1}{2}i\ \cdot 0 + \frac{1}{2}i(-\ 2\pi i\sin(2i) == i\pi\ sh2.$$

Литература

1. Хайруллина Я.А., Хайртдинова Г.Ф. Вычисление объемов // Идеи и проекты молодежи России: материалы Всероссийской научно-практической конференции. 29 октября 2015 г. / гл. ред. М.П. Нечаев. – Чебоксары: Экспертно-методический центр, 2015. – с. 129-132. URL: http://emc21.ru/catalog/idei-i-proekty-molodezhi-rossii/
2. Галиуллина Г.А. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ // Итоговая научно-образовательная конференция студентов Казанского федерального университета 2016 года: сб. статей: в 5 т. / Мин-во образования и науки; Казанский (Приволжский) федеральный ун-т. – Казань: Изд-во Казан.ун-та, 2016. – Т. 5: Набережночелнинский институт, Елабужский институт. – с. 494-496.
3. Ризванова Л.З. ВОЗВЕДЕНИЕ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА В СТЕПЕНЬ // Итоговая научно-образовательная конференция студентов Казанского федерального университета 2016 года: сб. статей: в 5 т. / Мин-во образования и науки; Казанский (Приволжский) федеральный ун-т. – Казань: Изд-во Казан.ун-та, 2016. – Т. 5: Набережночелнинский институт, Елабужский институт. – с. 496-498
4. Миронов А.Н., Миронова Ю.Н. Теория функции комплексной переменной: учеб.пособие // Елабуга: Изд-во ЕГПУ, 2007.
5. Давыдов Н.А. Сборник задач по математическому анализу: учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак-тов пед. ин-тов // Изд. 4-е, доп. М., «Просвещение», 1973.