Исследование модели взаимодействия двух популяций с логистическими функциями

Осипов Геннадий Сергеевич

Распутина Елена Ивановна

Сахалинский государственный университет,

Государственный университет морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова

Рассмотрим модель системы хищник-жертва при условии насыщения роста плотности популяции жертв.

$$\begin{cases} \dot{y} = k_y y \cdot x - q_y y \\ \dot{x} = k_x x - q_x x \cdot y - p_x x \cdot x \end{cases},$$

где x, y – плотность популяций жертв и хищников, соответственно;

k_x, q_y – мальтузианские параметры;

q_x, k_y – коэффициенты межвидового взаимодействия;

p_x – параметр насыщения по плотности жертв.

В данной системе имеется невырожденная особая точка $O(x_0, y_0)$ с координатами

$$y_0 = \frac{k_x k_y - p_x q_y}{q_x k_y};\ x_0 = \frac{q_y}{k_y}$$

Определим тип особой точки и характер поведения системы при малом отклонении от этой точки. Положив $y = y_0 + \tilde{y};\ x = x_0 + \tilde{x}$, получим следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{y}} = k_y y_0 \tilde{x} \\ \dot{\tilde{x}} = -p_x x_0 \tilde{x} - q_x x_0 \tilde{y} \end{cases}.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\left(\lambda + \frac{p_x x_0}{2}\right)^2 = \frac{(p_x x_0)^2}{4} - q_x q_y y_0.$$

При выполнении условия:

$$y_0 > \frac{p_x^2 q_y}{4 q_x k_y^2}$$

собственные числа – комплексно-сопряженные с отрицательной действительной частью:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p_x q_y}{2k_y} \pm \frac{1}{2k_y}\sqrt{q_y\left(4 q_x k_y^2 y_0 - p_x^2 q_y\right)}i\ .$$

Таким образом в данном случае точка $O(x_0, y_0)$ является «устойчивым фокусом», а фазовые траектории – «логарифмическими спиралями»

Исследуем более общую модель, когда учитывается насыщение как популяции жертв так и хищников.

$$\begin{cases} \dot{y} = k_y yx - q_y y - p_y yy \\ \dot{x} = k_x x - q_x xy - p_x xx \end{cases},$$

где p_y – параметр насыщения по плотности хищников.

Находим координаты невырожденной особой точки:

$$y_0 = \frac{k_x k_y - p_x q_y}{q_x k_y + p_x p_y};\, x_0 = \frac{q_y + p_y y_0}{k_y}.$$

Составляем систему дифференциальных уравнений для определения характера поведения системы вблизи особой точки:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{y}} = k_y y_0 \tilde{x} - p_y y_0 \tilde{y} \\ \dot{\tilde{x}} = -p_x x_0 \tilde{x} - q_x x_0 \tilde{y} \end{cases}.$$

Запишем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -p_x - \lambda & -q_x x_0 \\ k_y y_0 & -p_y y_0 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda^2 + \lambda\left(p_x x_0 + p_y y_0\right) + p_x p_y x_0 y_0 + q_x k_y x_0 y_0 = 0,$$

$$\left(\lambda + \frac{p_x x_0 + p_y y_0}{2}\right)^2 = \frac{\left(p_x x_0 + p_y y_0\right)^2}{4} - \left(p_x p_y + q_x k_y\right) x_0 y_0.$$

Очевидно собственные числа – комплексно-сопряженные с отрицательной действительной частью. Значит особая точка является «устойчивым фокусом», а фазовые траектории – «логарифмическими спиралями»

На рисунке 1 представлена схема имитационной модели системы в среде аналитической платформы *AnyLogic*.

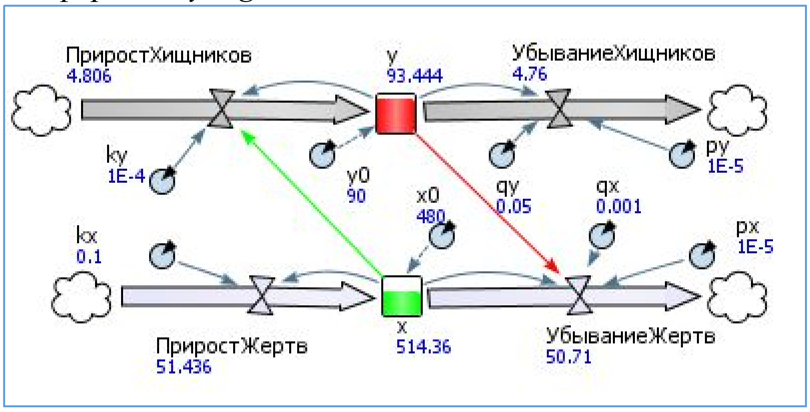

Рис. 1 Принципиальная схема модели

На рисунке 2 представлен типовой фазовый портрет системы.

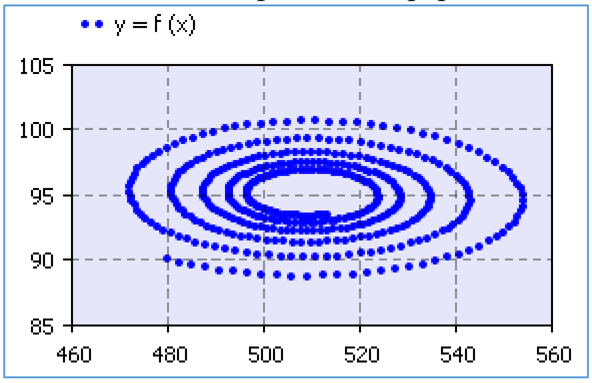

Рис. 2 Фазовая траектория

Здесь в качестве начальных условий использовались следующие данные:

$$y(0) = 90;\, x(0) = 480.$$

Для принятых исходных данных, представленных на рисунках 1 и 2, фокус имеет координаты:

$$O(509,491;94,905).$$

График изменения доли хищников в общей численности двух популяций представлен на рисунке 3.

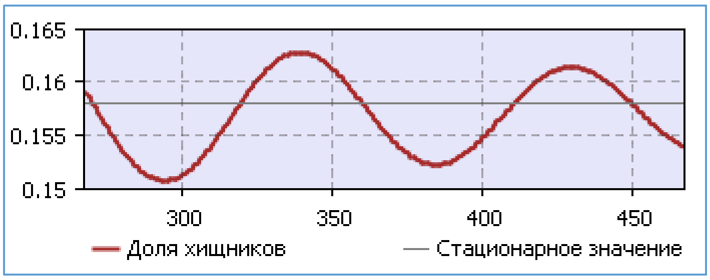

Рис. 3 Изменение доли хищников во времени

Очевидно, стационарное значение этой величины равно:

$$\frac{y_0}{x_0+y_0}=0,1572.$$

Список использованной литературы:

1. Колпак Е. П. Горыня Е. В., Селицкая Е. А. О моделях А. Д. Базыкина «хищник — жертва» // Молодой ученый. — 2016. — №2. — С. 12-20.

2. Александров А. Ю., Платонов А. В. О предельной ограниченности и перманентности решений одного класса дискретных моделей динамики популяций с переключениями// Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2014. — № 1. — С. 5-16.

3. Базыкин А. Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. Москва-Ижевск: Институт компьютерных технологий, 2003. — 368 с.

4. Лебедева М.И., Норин А.В. Неклассическая модель хищник-жертва // Математические структуры и моделирование. 2016. № 1(37). С. 30–35

5. Осипов Г.С., Распутина Е.И. Исследование модели хищник-жертва с трофическими функциями //Постулат. 2017. № 2. С. 7.