Эрдниев Б.П., КалмГУ

Горяев В.М., КалмГУ

Касающиеся окружности

Он с детства не любил овал
Он с детства угол уважал!
Павел Коган об Осипе Мандельштаме.

60 лет назад Ю.И.Гайдук и А.Н. Хованский в двух обзорах в журнале «Математика в школе» дали 1958 №2, 1960 №2.

Эти строки вполне могут быть эпиграфом к творчеству, к сожалению недавно (15.08.2015) ушедшего Алексея Геннадьевича Мякишева, известного специалиста в области геометрии треугольника.

Ф. Кэджори, автор известной «Истории элементарной математики» [Одесса,1917], призывает своих читателей «…обратить внимание..на удивительные успехи, достигнутые в геометрии треугольника и круга во второй половине девятнадцатого столетия… открытие новых теорем в новейшее время, -подчеркивает он, - должно показаться нам еще более замечательным, если мы примем во внимание то, что фигуры эти подвергались уже внимательному рассмотрению как со стороны остроумных греков, так и со стороны длинного ряда геометров, появившегося после них».

К этим словам историка математики нужно добавить, что плодотворная разработка геометрии треугольника и смежных с ней областей элементарной геометрии велась в течении всей первой половины текущего столетия и продолжается также в наши дни. В результате этих достижений «геометрия треугольника и тетраэдра» превратились в стройную и официально признанную научную дисциплину. Тесное соприкосновение этой дисциплины с областью школьной геометрии, с одной стороны, и с обширным полем высшей геометрии – с другой, делает ее естественным «мостом» между первой и второй, и объясняет большой интерес к ней со стороны преподавателей средней школы. © Краткий обзор «математика в школе», 1959г. №2

Возможности координатного представления теорем Фейрбаха и Мякишева

Сейчас в заданиях ЕГЭ и ГИА, и, соответственно, в пособиях МЦМНО, журналах «Математика в школе», «Математика для школьников» публикуют начальные разделы классической геометрии треугольника, можно называть Н-геометрией. Под Н-геометрией будем понимать и обозначение ортоцентра и теорему В. Гамильтона о взаимности ортоцентра и вершина остроугольного треугольника в трех треугольниках ΔABH, ΔACH и ΔBCH.

В этой статье мы рассматриваем возможность касания как внутреннего (I часть), так и внешнего (I I часть). Окружность 9 точек с окружностями, вписанных последовательно в три угла треугольника.

Каждое из иррациональных уравнений $|\overline{EI_J}|$=R:2−r, i=1,2,3 при возведении в квадрат приводится к квадратному, имеющих всегда положительный дискриминант. Один корень по смыслу теоремы Фейербаха должен соответствовать центру вписанной окружности I как касающаяся поочередно двух сторон треугольника, а второй корень определяет центр J_i принципиально новой окружности и соответствующим трем точкам внутреннего касания M_i i=1,2,3.

Аналогом центров вневписанных окружностей $I_{a,b,c}$ будут $J_{a,b,c}$ центры окружностей вписанных в углы A,B,C и касающихся внешним образом окружности «девяти точек»; образованных продолжениями сторон треугольника. Обозначения $I_{a,b,c}$, $R_{a,b,c}$ наряду с H - классические символы геометрии треугольника.

Противоставление R и r стало каноническим, индексным стало обозначение радиусов вневписанных окружностей r=S:p; где p-полупериметр,

$r_{a[b,c]} = \frac{s}{p-a[b,c]}$;Отметим, что r_a, r_b, r_c могут во много раз больше R. Для тупоугольных треугольников ABH, AHC, HBC мы специально вводим цифровую индексацию. r_i , i=1,2,3 -

Мы предлагаем радиусом вневписанных окружностей обозначать как R_{ij}. *Например,* r_1 *и* R_{11}, R_{12}, R_{13} для HBC, которые значительно больше радиуса R- описанных окружностей $\{O_i\}$ и тем более радиуса общей окружности Эйлера. Центр окружности Эйлера и точка Фейербаха удачно обозначены 5 и 6 – буквой латинского алфавита E, F где A,B,C - вершины треугольника. Тогда можно считать D – четвертой вершиной равногранного или ортоцентрического тетраэдра, имеющих общий центр описанной сферы. Таким образом первая шестерка букв: ABCDEF, далее O, I; R и r, G, H; h_i, $p = \left(\frac{a+b+c}{2}\right)$; получает однозначные обозначения в этой статье. Можно даже назвать более кратко «о-центр» или омцентр по аналогии с инцентром.

Первой формулой Эйлера и геометрии треугольника считается: $\overrightarrow{OG}:\overrightarrow{GH} = 1:2$, второй формулой: $IO^2 = R(R-2r)$ являются минимумом, обязательным для всех, кто имеет представление об этой теории. Ставшее вредной традицией обозначение всех окружностей буквой O затрудняет идентификацию самой красивой геометрической теорией.

Теорема Фейербаха: Окружность девяти точек касается вписанной и трех вневписанных окружностей треугольника.

И здесь уже кажется невероятным, что через 190 лет(!) российский математик А. Г. Мякишев находит еще три окружности J_i, вписанные в три угла треугольника, которые также касаются внутренним образом окружности 9 точек.

Но это только на первый взгляд. Достижение российского математика также рискует быть забытым, так как у него нет четко выраженного цифрового чертежа в декартовой системе координат. Поэтому справедливо высказывание лауреата Нобелевской премии, академика Петра Леонидовича Капицы: «Теория – хорошая вещь, но правильно поставленный эксперимент остается навсегда».

А. Мякишев дает доказательство в барицентрических координатах, но без конкретного цифрового чертежа, хотя прямая, на которой расположены эти центры имеет вполне замечательный геометрический смысл.

А именно:

Прямая, содержащая центры J_i вписанных в углы остроугольного треугольника ABC окружностей, и касающихся внутренним образом окружности девяти точек, совпадает с прямой HS ,где H-ортоцентр этого треугольника, а S-его точка Шпикера- центр окружности, вписанный в его серединный треугольник

Отметим физический смысл S, которая является центром тяжести периметра треугольника ABC, т.о. в задачах теорема проверяется простым физическим опытом. Таким же как точка G – центроид ΔABC, делящий отрезок OH в отношении OG:GH= 1:2.

В английской школе в качестве образца остроугольного треугольника общего вида, с «хорошо разделенными замечательными точками» брался треугольник со сторонами 17;25;28 образованный объединением египетского 15;20;25 и латинского 8;15;17. Длины сторон этого треугольника были умножены на 12, что позволило дать целочисленные координаты шести замечательным точкам: A(0;0); B(336;0); C(240;180); O(168;26); H(240;128);I(216;72)E(204;77);F(282.5;44.3) и т.д.

Мы выбрали свой чертеж с учетом стандартного листа А4 200х299

Если при масштабе 1 мм взять канонические параметры треугольника 17;25;28, то необходимо было нужно умножить на 12 или 1,2. Тогда мы получим треугольник, который не помещается на формате листа поэтому мы выбрали другой – объединение египетского:3;4;5 и индийского: 5;12;13 и получим треугольник:13,20,21 с угловыми показателями $36^0 52'$; $67^0 23'$;$75^0 45'$.

В этом треугольнике можно увидеть, что прямая OH почти параллельна AC.

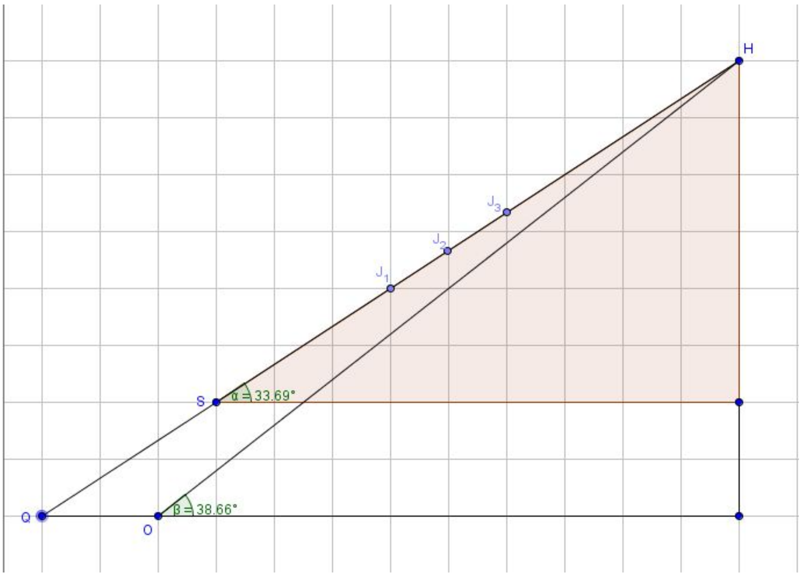
Теорема Мякишева заключается в том, что центры окружностей, находятся на прямой SH, находящейся в малой окрестности точек S,O,H,G

Назовем эту прямую по аналогии с прямой Эйлера «прямой Мякишева» и найдем угол между этими прямыми.

Угол наклона между прямыми OH и SH равен:

K(OH)= $\frac{192-126}{80-32} = \frac{66}{48} = \frac{11}{8}$

K(SH)=



∠SHO≈3°.

Уравнения «прямой Мякишева»

Y

Уравнения прямой Эйлера

O(12,6;3.2)   H(19,2;8)

$$Y = \frac{8}{11}(x - 12{,}6) + 3{,}2$$

$$Y = \frac{2}{3} * x - 4.8$$

Вычисление координаты центров окружности J1 и J2, касающихся горизонтальной стороны AB, заключается в том, что ордината центра J1 равна искомому радиусу вписанной окружности:

y=r.

Сама же ордината y связана с «x» в уравнении биссектрисы углов A и *B*.

Это будет уравнение прямой с угловым коэффициентом, где k- тангенс угла наклона.

$$tgA = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

Уравнение AC

$$Y = \frac{3}{4}x$$

Половина угла

$$A/_2 = 18°26'$$

$$tg\, A/_2 = \frac{1}{3} = 0{,}3333$$

Уравнение

Биссектриса AI

$$Y = \frac{1}{3}X$$

$$B = 67°23'$$

$$tgB = \frac{12}{5} = 2{,}4$$

Уравнение BC

$$Y = -2{,}4(X - 25{,}2)$$

$$B/_2 = 38°42'$$

$$tg\, B/_2 = \frac{2}{3} = 0{,}6667$$

Биссектриса BI

$$Y = -\frac{2}{3}(X - 25{,}2)$$

Так как окружности $J_{1,2}$ касаются общей стороны AB, то y=r, отсюда x=3r.

x=25,2 – 1,5r.

Будем считать, что r неизвестен и составим уравнение расстояния между центрами внутренне касающихся окружностей:

$J_1(3r; r); E(15{,}9; 56)$ $\qquad$ $J_2(25{,}2 - 1{,}5r, r)$

Получим иррациональное уравнение, приводящее к квадратному, причем этот тип иррациональных уравнений встречается в ЕГЭ, как обыкновенное алгебраическое уравнение.

$$\sqrt{(3r - 15{,}9)^2 + (r - 5{,}6)^2} = 6{,}5 - r$$

$$9r^2 - 93{,}6r + 241{,}92 = 0$$

$$r^2 - 10{,}4r + 26{,}88 = 0$$

$$r = 5{,}2 \pm \sqrt{27{,}04 - 26{,}88} = 5{,}2 \pm \sqrt{0{,}16} = 5{,}2 \pm 0{,}4$$

$$r_F = 5{,}2 + 0{,}4 = 5{,}6$$

$$I(16; 8; 5{,}6)$$

$$\sqrt{(25{,}2 - 1{,}5r - 15{,}9)^2 + (r - 5{,}6)^2} = 6{,}5 - r$$

$$9{,}3^2 - 27{,}9r + 2{,}25r^2 + r^2 - 11{,}2r + 31{,}36 = 42{,}25 - 13r + r^2$$

$$2{,}25r^2 - 26{,}1r + 75{,}6 = 0$$

$$r^2 - 11{,}6r + 33{,}6 = 0$$

$$r = 5{,}8 \pm \sqrt{33{,}64 - 33{,}6} = 5{,}8 \pm \sqrt{0{,}04} = 5{,}8 \pm 0{,}2$$

$$r_F = 5{,}8 - 0{,}2 = 5{,}6$$

$$I(16; 8; 5{,}6)$$

Координаты центров и радиусы окружностей А.Мякишева

при $r_{J_1} = 5{,}2 - 0{,}4 = 4{,}8$; $r_{J_2} = 5{,}8 + 0{,}2 = 6$;

$x = 3 * 4{,}8 = 14{,}4$ $x = 25{,}2 - 9 = 16{,}2$

$J_1(14{,}4; 4{,}8)$ $J_2(16{,}2; 6)$

Точка J_1 *левее и ниже* E *Точка* J_2 *правее и выше* E

Найдем направляющий вектор линии центров:

$\overrightarrow{EJ_1} = (14{,}4 - 15{,}9; 4{,}8 - 5{,}6)$ $\overrightarrow{EJ_2} = (16{,}2 - 15{,}9; 6 - 5{,}6)$

Длина $\overrightarrow{EJ_1}$ *равна* $1{,}7$; *Длина* $\overrightarrow{EJ_2}$ *равна* $0{,}5$;

Проверка характеристического уравнения

$$|EJ_i| = {}^{R}/_{2} - r$$

1,7=6,5-4,8 0,5=6,5-6

По направлению векторов $\overrightarrow{EJ_\imath}$ *можно предугадать положение точек касания* M_i.

M_1- в нижнем левом углу M_2- в верхнем правом углу

Найдем точки касания $M_{1,2}$ *аналог точек Фйербаха.*

$$\begin{cases} X_{M_1} = 15{,}9 - \dfrac{6{,}5}{1{,}7} * 1{,}5 \approx 10{,}2 \\ Y_{M_1} = 5{,}6 - \dfrac{6{,}5}{1{,}7} * 0{,}8 \approx 2{,}5 \end{cases} \qquad \begin{cases} X_{M_2} = 15{,}9 + \dfrac{6{,}5}{0{,}5} * 0{,}3 = 19{,}8 \\ Y_{M_2} = 5{,}6 + \dfrac{6{,}5}{0{,}5} * 0{,}4 = 10{,}8 \end{cases}$$

$$M_1(10{,}2;\, 2{,}5) \qquad M_2(19{,}8;\, 10{,}8)$$

Координаты М1 удобнее вычислять в целых и смешанных числах:

$$\begin{cases} X_{M_1} = 159 - 65 * \dfrac{15}{17} = 101\dfrac{9}{17} \\ Y_{M_1} = 56 - 65 * \dfrac{8}{17} = 25\dfrac{7}{17} \end{cases}$$

Вычисление центра внутренней окружности Мякишева J_3, (радиус этой окружности r нам неизвестен, центр лежит на биссектрисе С.

Характеристическое уравнение окружностей, касающейся внутренним образом {E} и {J_3}:

$|\overrightarrow{EJ_3}| = \frac{R}{2} - r_3$ (1)

$\overrightarrow{CI}$=(192-168;144-56)=(24;88)- Уравнение прямой CI является параметрическим уравнением центров окружностей, касающихся сторон угла ACB

Вычислим расстояние от центра окружности Мякишева I_c до сторон AC и BC.

Уравнения AC: BC:

$3x-4y=0$; $\vec{n}=(3,-4)$ $|n|=5$ $\quad$ $12x+5y-12\cdot 252=0$; $\vec{n}=(5,12)$ $|n|=13$

ρ (J,AC)= $\dfrac{3(192\text{-}24t)\text{-}4(144\text{-}88t)}{5}$ =56t

ρ (J,BC)= $\dfrac{5(192\text{-}24t)+12(144\text{-}88t)\text{-}12*252}{13}$ =56t (3)

Проверки при t=0 и t=1 подтверждает что радиус окружности равен при 1) t=0 , r=0; при 2) t=1; r=56 в точке I(158,56).

Мы выбрали целые значения координат так как при вычислении W_3 и значение r_3 будут использованы обыкновенные дроби со двузначными знаменателями. Можно предположить что $r_t = 56 * t$.

По смыслу одно значение корня будет соответствовать вписанной окружности I(168;56), а второе – искомой нашей окружности J_3.

$$\sqrt{(192-24t-159)^2+(144-88t-56)^2}=65-56t$$

$(33\text{-}24t)^2\text{-}(88\text{-}88t)^2=4225\text{-}728t+3136t^2$

$5184t^2\text{-}9792t+4608=0$

$576t^2\text{-}1088t+512=0$

$9t^2\text{-}17t+8=0$ характеристическое уравнение центра окружности Мякишева

$t_1=\frac{17\pm\sqrt{289\text{-}288}}{18}=\frac{17\pm1}{18}$;

$t_1=1$; $r=56$; =>I(168;56)

$t_2=\frac{16}{18}=\frac{8}{9}$ $X_t=192\text{-}\frac{192}{9}=192\text{-}21\frac{1}{3}=170\frac{2}{3}$ $Y_t=144\text{-}\frac{704}{9}=144\text{-}78\frac{2}{9}=65\frac{7}{9}$

$r_3=\frac{448}{9}=49\frac{7}{9}$

Проверка:

1) по характеристическому уравнению окружностей: $|\overrightarrow{EJ3}|=\frac{R}{2}-r_3$ (1)

$\overrightarrow{EJ3}=(11\frac{2}{3};9\frac{7}{9})=(11\frac{6}{9};9\frac{7}{9})=\frac{1}{9}$ (105;88) по пифагоровой триаде (105;88;137)

$|\overrightarrow{EJ3}|=\frac{137}{9}=15\frac{2}{9}=65\text{-}49\frac{7}{9}$

2) что окружность Мякишева с центром $J_3(170\frac{2}{3};65\frac{7}{9})$ с радиусом $r_3=49\frac{7}{9}$ касается окружности Эйлера с центром E(159;56) с радиусом $\frac{R}{2}=65$.

3) что центр окружности Мякишева с центром $J_3(170\frac{2}{3};65\frac{7}{9})$ лежит на прямой SH с уравнением $Y=\frac{2}{3}X\text{-}48$.

$\frac{2}{3}(170\frac{2}{3})=\frac{340}{3}+\frac{4}{9}=113\frac{1}{3}+\frac{4}{9}=113\frac{7}{9}$

$113\frac{1}{3}\text{-}48=65\frac{7}{9}$.

Покажем, что прямые AM1, BM2, CM3 пересекаются в точке F.

$M_1(101\frac{11}{17}; 25\frac{7}{17})$, F(224;56)

Так как угловой коэффициент: k(AF)=56/224=1/4, то достаточно провести числовую проверку: $25\frac{7}{17}\cdot 4 = 100\frac{28}{17} = 101\frac{11}{17}$

Точки A, M_1,F – коллинеарны.

Проверим, что точки B(252;0), M_2(198;108), F(224;56) лежат на одной прямой:

$k(BM_2)=\frac{108}{198-252}=-2$, $k(BF)=\frac{56}{224-252}=-2$. Поэтому точки B, M_2, F лежат на одной прямой. Причем две прямые AM_1 и BM_2 пересекаются в точке F.

Проверим, что точки C(192;144), $M_3(208\frac{112}{137}; 97\frac{103}{137})$, F(224;56) также лежат на одной прямой.

$\overline{CF}=(56-144; 224-192)=(-88; 32)$, k(CF)=−88:32=−11:4=−2,75

$\overline{CM_3}=(208\frac{112}{137}-192; 97\frac{103}{137}-144)=(16\frac{112}{137};-46\frac{34}{137})$

Так как угловой коэффициент: k(CF)=−2,75, то достаточно провести числовую проверку: $46\frac{34}{137}:16\frac{112}{137}=(46\cdot137+34):(16\cdot137+112)=6336:2304=2,75$