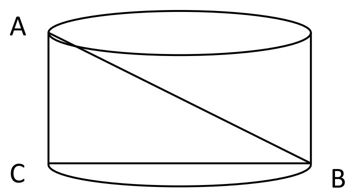
Точки Мякишева

Первая арифметическая триада 1+2=3 представляет собой прямоугольный треугольник с катетами 1 и $\sqrt{2}$, гипотинузой $\sqrt{3}$ в осевом сечении цилиндра



Тангенс угла $35^0 16'$ наклона этой диагонали равен $\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}7071.$ Для определенности назовем его углом И.Кеплера в теореме: "Из всех цилиндров с постоянной длиной диагонали в осевом сечении, наибольшей объем имеет, тот, у которого отношение диаметра основания к высоте равно $\sqrt{2}$". [1]

Тангенс $26^0 34'$ равный 0,5 представляет угол в теореме:

«Из всех цилиндров с открытыми верхними основаниями с постоянной площадью поверхности, наибольший объем имеет тот, у которого отношение диаметра основания к высоте равна 2».

И, конечно, тангенс 45^0 равный 1 представляет классическую теорему «Из цилиндров с открытыми верхними основаниями с постоянной площадью полной поверхности, наибольший объем имеет тот, у которого высота равна диаметру».

Этот прямоугольный треугольник выражен арифметической триадой: 1+1=2 или $1^2 + 1^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2$.

Удвоение этого треугольника относительно катета BC порождает равно равнобедренный треугольник с углом A=C=$54^0 44'$.

[1] Кеплер И. Новая стереометрия винных бочек. М: Гостехиздат, 1935.

У этого треугольника ортоцентр H делит высоту пополам, а центр описанной окружности O находится в середине отрезка HN. Таким образом AO=OB=R;

Но самое важное в том, что четвертая вершина равногранного тетраэдра D находится на перпендикуляре DN=BN к плоскости ΔABC, при этом этот тетраэдр можно получить перегибанием листа бумаги формата A4.

Грань ABD перпендикулярна грани ABC; центроид G удален от плоскости ABC на расстоянии ON=r*. Так нам центроид G совпадает с центром вписанной сферы, то удобно AN=4 у.е.; BN=$4\sqrt{2}$; ON=$\sqrt{2}$; AB=8; AC=$4\sqrt{2}$. Если $B^{(4;4\sqrt{2})}C^{(8,0)}$, то $D^{(4;0,4\sqrt{2})}$; G*≡O*≡J*($4\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$)

R*=$\sqrt{4^2+2+2}=\sqrt{20}$; r*=$\sqrt{2}$.

Введем понятие сопряженности ортоцентра к равногранному тетраэдру с той же опорной гранью ABC, вершина которого E* проектируется в ортоцентр H, поэтому E(4; $2\sqrt{2}$;$4\sqrt{2}$), его H*(4; $2\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$).

На гранях равногранного и ортоцентрического тетраэдров можно демонстрировать отдельные компоненты геометрии треугольника.

Триада 2,3,4- треугольник основная грань тетраэдра Торичелли!

Из всех треугольников вида $\boxed{\text{n-1, n, n+1}}$ существует только один треугольник 2, 3, 4! Соответствующее квадратное уравнение имеет только одно целочисленное решение:

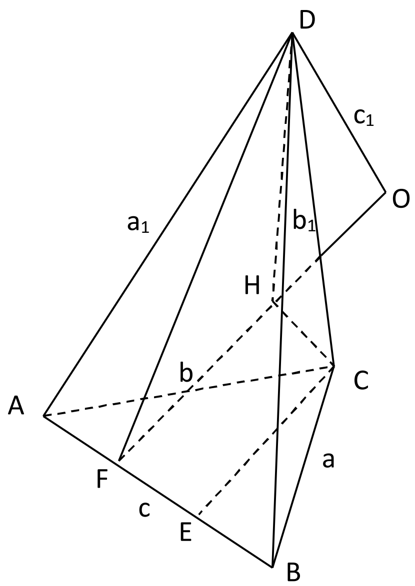
$(n-1)^2+(n^2)<(n+1)^2$.

В тетраэдре ABCD (см.чертеж) с высотой DG проведем отрезки CE, FG и DF перпендикулярно к AB, CH параллельно к AB[2]. Высота DG тетраэдра является высотой треугольника DFH. Она будет найдена, если нам удастся найти стороны этого треугольника. Стороны DF и FH=CE могут быть найдены как высоты соответственно треугольников ABD и ABC, стороны которых известны. Третью сторону DH можно рассматривать как катет прямоугольного треугольника CDH, гипотенуза которого известна, а другой

[2] Я.А.Габович 1963 с.58.

катет CH=EF есть разность отрезков BF и BE; последние вычисляются по обобщенной теореме Пифагора, примененной к треугольникам ABD и ABC. Шаги приведенной схемы требуют применения формулы Герона, обычный вид которой удобен в случае рациональных сторон треугольника. Если же последние являются квадратичными иррациональностями (таковыми могут оказаться стороны треугольника DFH), удобнее использоваться следующей записью формулы Герона:

$16S^2=4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2$.



Приведем численный пример: Пусть $a=2$, $b=3$, $c=4$, $a_1=3$, $b_1=4$, $c_1=3$.

Имеем:

$1)\ BE=\frac{11}{8};\ 2)\ BF=\frac{23}{8};\ 3)\ CH=\frac{3}{2};$

$4)\ DH=\frac{3\sqrt{3}}{2};\ 5)\ S_{ABC}=\frac{3\sqrt{15}}{4};\ 6)\ FH=\frac{3\sqrt{15}}{8};$

$7)\ S_{ABC}=\frac{3\sqrt{55}}{4};\ 8)\ DF=\frac{3\sqrt{55}}{8};\ 9)\ S_{DBH}=\frac{9\sqrt{11}}{16};$

$10)\ DC=\frac{\sqrt{165}}{5};\ 11)\ V=\frac{3\sqrt{11}}{46}.$

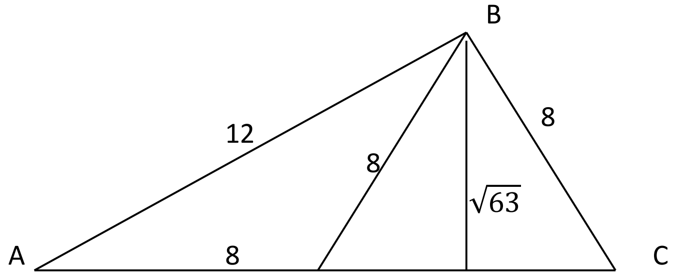
Треугольник 3,4,5 – египетский. Из всех прямоугольных треугольников вида n-1, n, n+1.

$(n-1)^2+(n^2) = (n+1)^2$.

$n^2-4n=0$

N=4.

4,5,6- такой треугольник был представлен недавно на республиканской Олимпиаде в Якутии. У такого треугольника $\angle C = 2\angle A$, AD = BD = 8.

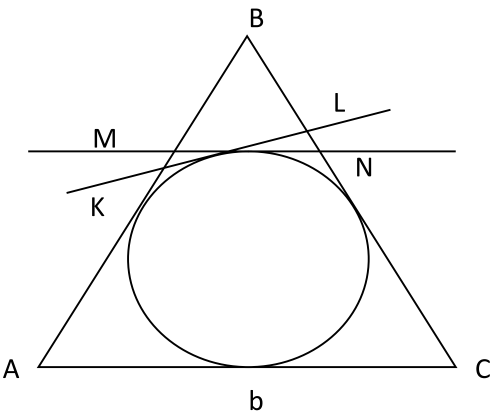


144=81+63.

$cosA = \frac{8+1}{12} = \frac{3}{4} = 0{,}75$. $A=41^0 24'$.

$cosC = \frac{1}{8} = \frac{3}{4} = 0{,}125$. $C=82^0 48'$.

Треугольник 5,6,7 использовался в заданиях ЕГЭ 2011 года.



1) Надо было найти длину отрезка касательной и вписанной окружности.

   Ответ: $MN = \frac{1}{3}; AC = 2\frac{1}{2}$.

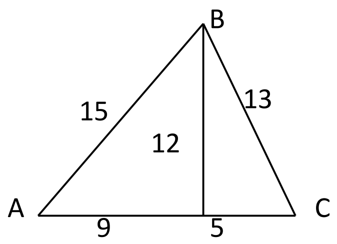
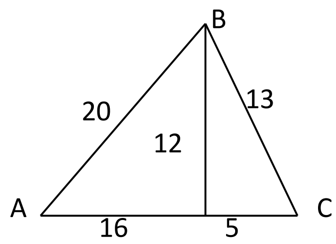
   При заключительном объяснении этого задания, надо сформулировать теорему Заттеля:

Если длина сторон треугольника образуют арифметическую прогрессию, то

1) $r = \frac{1}{3} h_b$;

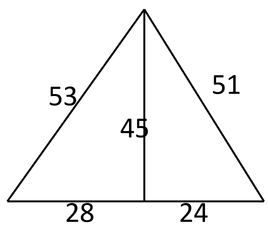
$MN = \frac{1}{3} b$, где b- среднее сторон.

Треугольник 13,14,15 имеет стороны на 10 больше, чем такие же параметры у египетского, с другой стороны это первый треугольник вида n-1, n, n+1 сопряженный нашему, так как он тоже является объединением египетского и индийского.

 $\hat{A} = 53°08'$ $\hat{B} = 36°52' + 22°36' = 59°28'$ $\hat{C} = 67°24'$	 $\hat{A} = 36°52'$ $\hat{B} = 67°24'$ $\hat{C} = 76°44'$

И, в заключении надо дать обобщенную формулу героновых треугольников Шебаршина: n-1, n, n+1.

$b = (2+\sqrt{3})^3 + (2-\sqrt{3})^3 = 8 + 3 \cdot 4\sqrt{3} + 3 \cdot 2 \cdot 3 + 3\sqrt{3} + 8 - 3 \cdot 4\sqrt{3} + 3 \cdot 2 \cdot 3 - 3\sqrt{3}$=16+36=52;



Объединение треугольников 45;28;53 с латинским треугольником 3(15;8;17).

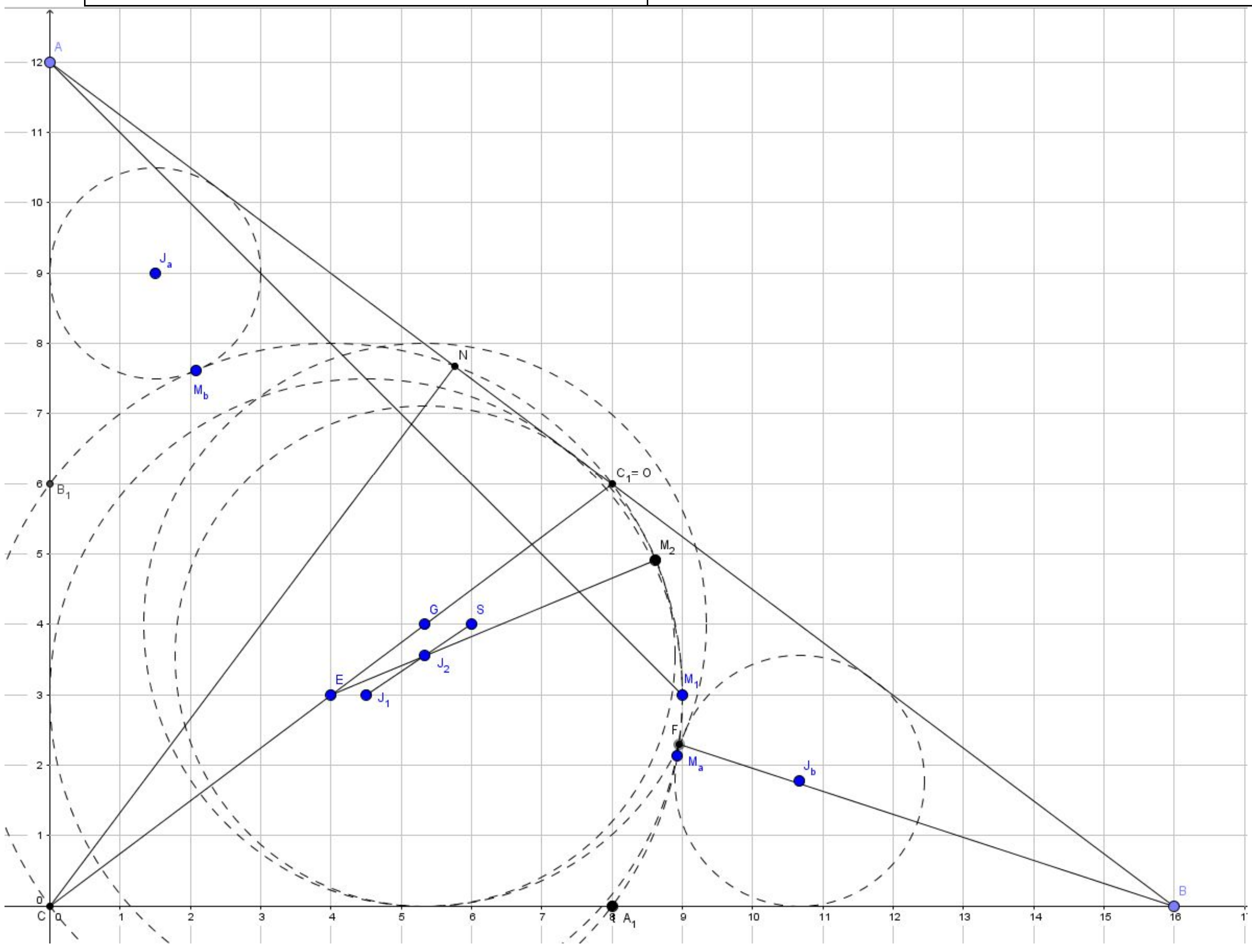
$\hat{A} = 53°06'$, $\hat{B} = 61°56'$.

x=r *y=-2(x)+12* *y=-2r+12* $\sqrt{(r-4)^2+(-2r+9)^2} =$ $= 5 - r$ $r^2-8r+16+81-36r+4r^2=25-10r+r^2$ $4r^2-34r+72=0$ $2r^2-17r+36=0$ $r = \frac{17 \pm \sqrt{289-288}}{4}$ $r = \frac{17 \pm 1}{4}$ $r_a = \frac{17-1}{4} = 4 => I(4{,}4)$ $\rho = \frac{17+1}{4} = 4{,}5$ $x = \rho = 4{,}5$ *y= –9+12=3 =>* $J_1(4{,}5; 3)$	*y=r* $y = \frac{1}{3}(x-16)$ *x=16-3r* $\sqrt{(16-3r-4)^2+(r-3)^2} = 5 - r$ $\sqrt{(12-3r)^2+(r-3)^2} = 5 - r$ *144-72r+9r2+r2-6r+9=25-10r+r2* *9r2-68r+128=0* $r = \frac{68 \pm \sqrt{4624-4608}}{18}$ $r = \frac{68 \pm 4}{18}$ $r_a = \frac{68+4}{18} = \frac{72}{18} = 4 => I(4{,}4)$ $\rho = \frac{68-4}{18} = \frac{32}{9} = 3\frac{5}{9}$ $y = 3\frac{5}{9}$ $x = 16 - \frac{32}{3} = 5\frac{1}{3}$ $J_2 = \left(5\frac{1}{3}; 3\frac{5}{9}\right)$

Найдем точки касания M_i.

$\overrightarrow{EJ_1} = (4{,}5-4; 3-3) = (0{,}5; 0)$ $\begin{cases} XM_1 = 9 \\ YM_1 = 3 \end{cases}$ $M_1(9;3)$	$\overrightarrow{EJ_2} = \left(5\frac{1}{3} - 4; 3\frac{5}{9} - 3\right) =$ $= \left(1\frac{1}{3}; \frac{5}{9}\right) = \frac{1}{9}(12; 5)$ *Триада: 12,5,13*

	$\begin{cases} XM_2 = 4 + 5\dfrac{12}{13} = 4 + \dfrac{60}{13} = 8\dfrac{8}{13} \\ YM_2 = 3 + 5\dfrac{5}{13} = 3 + \dfrac{25}{13} = 4\dfrac{12}{13} \end{cases}$ $M_2(8\frac{8}{13}; 4\frac{12}{13})$



N(5,76 ; 7,68)

N- основание высоты, опущенной из прямого угла.

$$CN = 12 \times \frac{16}{20} = 9.6$$

$$\begin{cases} X_N = 9{,}6 \times 0{,}6 = 5{,}76 \\ Y_N = 9{,}6 \times 0{,}8 = 7{,}68 \end{cases}$$

Уравнение окружности Эйлера:

$(x-4)^2+(y-3)^2=25$

$(5{,}76-4)^2+(7{,}68-3)^2=1{,}76^2+4{,}68^2=25$

Триада:

1,76; 4,68; 5 или 44; 117; 125