Эрдниев Б.П., д.п.н., зав.лаб.УДЕ КалмГУ

Горяев В.М., к.п.н., зав.каф.ИТИБ

Выделение и уточнение смысловых единиц геометрии треугольника на примере задания №18 ЕГЭ-2015

На олимпиаде «Куб» учителей математики Калмыкии, состоявшейся 22 августа 2015 года, предлагались задачи, которые можно считать смысловыми единицами геометрии треугольника и смежных с ним фигур. В рамках данного мероприятия участники имели возможность сравнить выделенные задачи текстом и чертежом к заданию №18.

Текст:

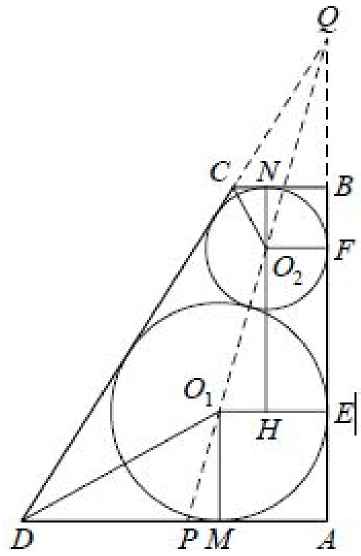
В прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямым углом при вершине A расположены две окружности. Одна из них касается боковых сторон и большего основания AD, вторая — боковых сторон, меньшего основания BC и первой окружности.

а) Прямая, проходящая через центры окружностей, пересекает основание AD в точке P. Докажите, что $\frac{AP}{PD} = \sin D$.

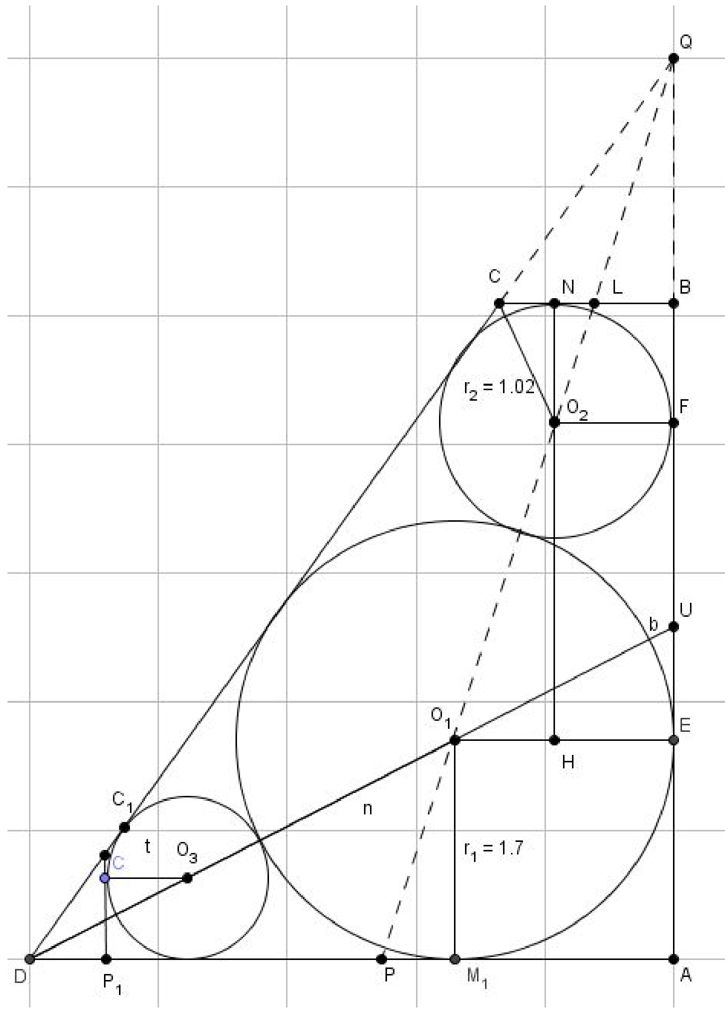
б) Найдите площадь трапеции, если радиусы окружностей равны $\frac{4}{3}$ и $\frac{1}{3}$.

Решение.

а) Пусть Q — точка пересечения продолжений боковых сторон. Точка Q, центры окружностей и точка P лежат на одной прямой, причём QP — биссектриса прямоугольного треугольника AQD. Следовательно, по свойству биссектрисы треугольника $\frac{AP}{PD} = \frac{QA}{QD} = \sin D$.



Чертеж 1.



Чертеж 2

Уточнение с дополнением ΔAQD и [ΔBCQ].

Биссектрисы треугольников

$$\frac{PD}{PD}=\frac{QA}{QD}=\frac{QC}{QB}=\frac{BP_1}{P_1C}=\sin D=cosQ$$

Пусть Q- точка пересечения продолжений боковых сторон (которые становятся двумя внешними касательными к окружностям O_1 и O_2).

(Тогда)…, которая является биссектрисой угла AQD и прямоугольных треугольников Δ AQD (и BQC).

Биссектрисы треугольников

$$\frac{AP}{PD}=\frac{QA}{QD}=\frac{BL}{LC}=cosQ$$

По справочной формуле: EF=E1F2=$2\sqrt{r_1\cdot r_2}$.

Это уточнение для угла D необходимо, так как биссектриса угла D d ΔADQ делит противоположную сторону AQ на отрезки AW и WQ пропорциональные смежным сторонам AD и DQ и их отношения в треугольнике ADQ косинуса угла D.

$$\frac{AU}{UQ}=\frac{AD}{QD}=\cos D$$

Поэтому трапецию надо вписать еще сопряженную окружность O_3, касающуюся боковой стороны , нижнего основания и первой окружности. Тогда же линия центров как биссектриса будет также делить отрезки касательных B_1C_1 к окружности O_3 на отрезки пропорциональные смежным сторонам A B_1 и DC_1, отношение B_1V и касательной VC_1

$$\frac{B_1V}{VC_1}=\frac{DK_1}{DC_1}=\cos D$$

Линия центров окружностей O_1 и O_4 являются биссектрисами прямого угла A и делит гипотенузу QD на отрезки DP_2 и P_2Q, которые пропорциональны сторонам AD и AQ. Поэтому

Итак, в трапеции ABCD можно расположить еще две окружности O_3 и O_4, касающиеся первой, нижнего основания и боковых сторон. Линии центров будут биссектрисами трех углов соответствующего прямоугольного треугольника.

Далее логично было бы ожидать в условиях задания значения праметров прямоугольной трапеции: трех длин сторон, острого (или тупого) угла при наклонной стороне и двух длин сторон и т.д. с вопросом найти радиусы взаимновписанных окружностей O_1 и O_2. Но это уже будет сложная, по терминологии математика Лоповка М. «проблемная задача» или «задача в задаче» (Рыжик В.), ведь только при определенных условиях в трапецию можно вписать первые две окружности O_1 и O_2.

Авторы задания выбрали обратную метрическую задачу:

б) Найдите площадь трапеции, если радиусы окружностей равны $\frac{4}{3}$ и $\frac{1}{3}$.

Конечно, выбор обыкновенных дробей с одинаковым числителем означал, что выпускник для экономии времени в вычислениях должен использоваться принцип подобия $k={}^{1}/_{3}$. Вычислив площадь трапеции при $r_1=4$ и $r_2=1$, затем разделив его на 9. Интересно, кто из российских выпускников применил этот принцип?

После вычисляются площади, естественно, надо дать значение периметра трапеции в чертеже.

В заключении обязательным после вычисления площади трапеции является вычисление площади отсеченного треугольника ΔQBC, которое в сумме дает значение площади треугольника ΔQBD. При этом радиус вписанной окружности надо дать цикловую формулу И.Г.Ярошевского, сопоставив ее аналогично формуле И.С.Зеттеля.

Зеттель, 1934 г.	Ярошевский, 1956 г.
$r=r_1+r_2+r_3$	$r=\sqrt{\rho_1}\sqrt{\rho_2}+\sqrt{\rho_1}\sqrt{\rho_3}+\sqrt{\rho_2}\sqrt{\rho}$

$r_i=\rho_{ij}$

Уточнение и дополнение к части б

Парадокс чертежа к задаче заключается в том, что на нем не соблюдены принципы подобия, не говоря уже о пропорциях.

В Δ ADQ и ΔBCQ длина AD=$^{32}/_{3}$ больше BC=$^{8}/_{21}$ ровно в 28 раз.

$tg\alpha = {}^{3}/_{4}$, поэтому α- угол египетского треугольника равен примерно 37° ($36°52'$).

$\widehat{DQC} = 2\alpha = 74°$ больше 45° на 29°, т.е. в 1,5 раза.

Поэтому надо поменять обозначения букв Q и D, центров окружностей O_2 и O_3. С точностью до подобие 28 кратное отношение большего основания к меньшему в трапеции можно только в том случае, если на чертеже вершина острого угла $\widehat{D} = 74°$ будет считаться недоступной.

б) Пусть окружность с центром O_1 радиуса R = 4 касается боковой стороны AB в точке E, а основания AD- в точке M; окружность радиуса r=1 с центром O_2 касается боковой стороны BC— в точке N . Опустим перпендикуляр O_2H из центра меньшей окружности на отрезок O_1E. Тогда $O_2H = O_2E - HE = O_1E - O_2F = R - r = 4-1 = 3$,

а так как линия центров окружностей проходит через их точку касания,

$O_1O_2 = R + r = 3+1 = 4$.

б) Окружность с центром O_1 радиуса R = 4 касается стороны AB в точке E_1, а основания AD- в точке M; окружность радиуса r=1 с центром O_2 касается боковой стороны AB в точке F, а основания BC— в точке N . Опустим перпендикуляр O_2H из центра меньшей окружности на отрезок O_1E. Тогда $O_2H = O_2E - HE = O_1E - O_2F = R - r = 4-1 = 3$,

а так как линия центров окружностей проходит через их точку касания,

$O_1O_2 = R + r = 4+1 = 5$.

Значит, $EF = O_2H == \sqrt{O_1O_2^2 - O_2H^2 = \sqrt{\frac{25}{9} - 1} = \frac{4}{3}}$

Обозначим $\angle AQP = \angle HO_2O_1 = \alpha$. Тогда $tg\alpha = \frac{O_1H}{O_2H} = {}^{3}/_{4}$,

$\angle BQC$ =2α, $\angle HO_2O_1$

Из треугольника O_2CN находим:

NC = O_2N ctg (α+45°)= O_2N tg (45°- α) = $\frac{1-\text{tg}\alpha}{1+\text{tg}\alpha} = \frac{4-3}{4+3} = \frac{1}{7}$

Следовательно, BC = BN + NC =$1 + \frac{1}{7} = \frac{8}{7} = 1\frac{1}{7}$.

Аналогично, $\angle O_1DM = 45° - \alpha$,

MD = O_1M ctg (45°- α)= O_1M tg (45°+ α)= $4 \cdot \frac{1-\text{tg}\alpha}{1+\text{tg}\alpha} = 4 \cdot \frac{4-3}{4+3} = 28$.

$AD = AM + MD$ =4 +28 =32 .

Учитывая, что $AB = AE + EF + FB = R + O_2H + r$ =4+4+1=9 , получаем:

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC)\cdot AB = \frac{1}{2}(32 + 8)\cdot 9 = 16\frac{4}{7} \cdot 9 = 144\frac{36}{7} = 149\frac{1}{7}$.

Ответ: б) $\frac{116}{7}$.