Уравнение касательной и нормали.

Латипова Айсылу

1 курс, факультет математики и естественных наук,

Елабужский институт КФУ,

Суржикова Оксана

3 курс, факультет математики и естественных наук,

Елабужский институт КФУ,

Научный руководитель: Миронова Ю. Н.,

Кандидат физ.-мат. наук, профессор РАЕ,

Доцент кафедры математики и прикладной информатики

Елабужского института КФУ,

Казанский (Приволжский) федеральный университет.

Иногда касательной называют прямую, имеющую с кривой только одну общую точку. Такой подход не раскрывает сущности понятия касательной.

Определение 1. Касательной в точке $\mathrm{A}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$ называется предельное положение секущей АМ, когда М→А по кривой.

Пусть кривая имеет уравнение $y = f(x)$, координаты точки $\mathrm{A}(\mathrm{x}_0, y_0)$ известны. Уравнение прямой, проходящей через точку А, имеет вид:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Значит, для определения уравнения касательной в точке А нужно знать угловой коэффициент k. У нас $y_0 = f(x)$, придав x_0 приращение Δx, получим точку $\mathrm{M}(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, где $y_0 + \Delta y = f((x_0) + \Delta x)$.

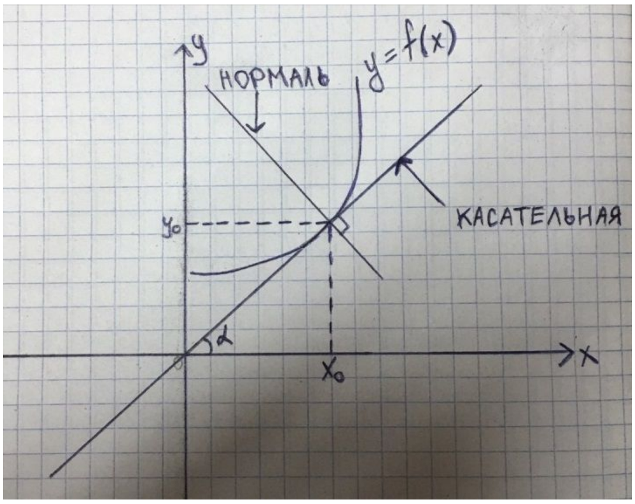
Так как угловой коэффициент касательной к кривой $y = f(x)$в точке $\mathrm{A}(x_0, y_0)$ равен $k = f'(x_0)$, то касательная в точке А имеет уравнение:

$$\boldsymbol{y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)},$$

если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0.

Понятие касательной позволяет определить угол между двумя кривыми в точке их пересечения. Углом между двумя кривыми называется угол между их касательными в точке пересечения кривых. Если угол равен $\frac{\pi}{2}$, то кривые называются ортогональными.

Определение 2. Прямая, проходящая через точку касания перпендикулярно касательной, называется *нормалью* к кривой.



Так как угловые коэффициенты взаимно перпендикулярных прямых обратны по величине и по знаку, то уравнение нормали к $y = f(x)$ в точке $\mathrm{A}(x_0, y_0)$ будет:

$$\boldsymbol{y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).}$$

Пример 1. $y = f(x) = \sin x$. Найти уравнение касательной и нормали в точке $x = \frac{\pi}{3}$.

$$f'(x) = \cos x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$y_0 = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{3})$ – УРАВНЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ

$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -2(x - \frac{\pi}{3})$ – УРАВНЕНИЕ НОРМАЛИ

Пример 2. Написать уравнение касательной и нормали к кривой

$y = x^2 - 3x + 4$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$.

$$y_0 = y(x_0) = y(0) = 4$$

Вычисляем значение производной функции в точке $x_0 = 0$.

$$y' = (x^2 - 3x + 4)' = -3$$

$y - 4 = -3(x - 0)$ – УРАВНЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ

$y - 4 = -\frac{1}{-3}(x - 0)$–УРАВНЕНИЕ НОРМАЛИ

Пример 3. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции

$y = 0{,}5x^2 - 0{,}5x + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 8$.

Определим ординату точки, имеющей абсциссу $x_0 = 8$. Подставляя это значение в уравнение кривой, получим:

$$y(8) = 0{,}5 * 8^2 - 0{,}5 * 8 + 1 = 32 - 4 + 1 = 29$$

Далее находим производную и вычисляем ее значение в точке $x_0 = 8$.

$$y' = (0{,}5x^2 - 0{,}5x + 1)' = x - 0{,}5$$

$$y'(8) = 7{,}5$$

$y - 29 = 7{,}5(x - 8)$ – УРАВНЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ

$y - 29 = -\frac{1}{7{,}5}(x - 8)$ – УРАВНЕНИЕ НОРМАЛИ

Пример 4. Записать уравнение касательной к графику функции

$f(x) = \ln(2x + 4)$ в точке $x_0 = -\frac{1}{2}$.

Найдем значение функции в заданной точке:

$y_0 = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln\left(2 * \left(-\frac{1}{2}\right) + 4\right) = \ln 3.$

Затем найдем производную заданной функции:

$f'(x) = \frac{1}{2x+4}(2x+4)' = \frac{2}{2x+4} = \frac{1}{x+2}.$

Найдем значение производной в заданной точке:

$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}.$

$y - \ln 3 = \frac{2}{3}(x + \frac{1}{2})$ – УРАВНЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ

Таким образом, мы узнали, как находить уравнения касательной и нормали к кривым. Рассмотрели примеры, в которых было показано по действиям, как находить эти уравнения нормалей и касательных. Нахождение касательных напрямую связано с производными. Именно задача нахождения касательной приводит нас к задачам нахождения производных простых и сложных функций.

Список литературы:

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М., 1969 г.

2. Игдеев А.Р., Суржикова О.В. Предел функции в точке// Всероссийская научно-практическая конференция «Математика в высшей школе». 2016. http://econf.rae.ru/article/10313 (дата обращения: 05.12.2016).

3. Матвеева А.Е., Макарова Н.В., Миронова Ю.Н. Интегрирование по частям как метод вычисления интегралов // Международный журнал экспериментального образования. 2016. № 3-1. С. 128-129. URL: http://www.expeducation.ru/ru/article/view?id=9687 (дата обращения:11.04.2016).

4. Миронов Н.П. Лекции по математическому анализу. Введение в анализ, 2. (Непрерывность. Элементарные функции.) Пособие для студентов физико-математического факультета. Елабуга, 1997 год.

5. Миронова Ю.Н. Некоторые топологические свойства лексикографически упорядоченного квадрата // Международный журнал прикладных и

фундаментальных исследований. – 2015. – № 12-10. – С. 1908-1909. URL: http://www.applied-research.ru/ru/article/view?id=8408 (дата обращения: 11.02.2016).