Односторонняя непрерывность. Точки разрыва.

Игдеев Артем Робертович

1 курс, факультет математики и естественных наук,

Елабужский институт КФУ,

Суржикова Оксана Вячеславовна

3 курс, факультет математики и естественных наук,

Елабужский институт КФУ,

Научный руководитель: Миронова Ю. Н.,

Кандидат физ.-мат. наук, профессор РАЕ,

Доцент кафедры математики и прикладной информатики

Елабужского института КФУ,

Казанский (Приволжский) федеральный университет.

В данной работе изучается исследование точек разрыва функции, построение графиков функций, определенных на сегментах.

Определение 1. Если $\lim_{x \to x_{1-0}} f(x) = f(x_0)$, то$f(x)$ называется непрерывной слева, а если $\lim_{x \to x_{1+0}} f(x) = f(x_0)$, то $f(x)$ называется непрерывной справа в точке x_0.

Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда $f(x)$ непрерывна в точке x_0 как слева, так и справа.

Определение 2. Точка x_0 называется точкой разрыва функции$f(x)$, если не выполняется условие $\lim_{x \to x_1} f(x_0) = f(x_0)$.

Если x_0- точка разрыва функции $\mathrm{f(x)}$, то

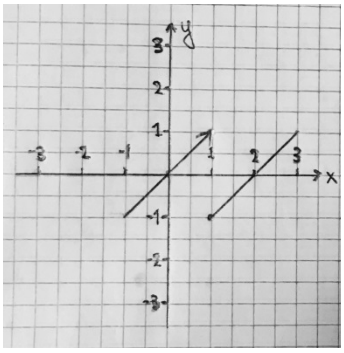
1. Либо не существует $\lim_{x \to x_1} f(x)$;
2. Либо $\mathrm{f(x)}$ не определенав точке x_0;
3. Либо $\mathrm{f(x)}$ определена в точке x_0 и имеет предел в этой точке, но $\lim_{x \to x_1} f(x) \neq f(x_0)$.

Определение 3. Точка разрыва x_0 функции $\mathrm{f(x)}$ называется точкой разрыва I рода, если существуют конечные односторонние пределы (оба) $\lim_{x \to x_1 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$ и $\lim_{x \to x_1 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$. Величина $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ называется скачком функции$f(x)$ в точке x_0. Если $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$, то точка x_0 называется точкой устранимого разрыва, а разрыв устранимым.

Определение 4. Точка разрыва x_0 функции $f(x)$ называется точкой разрыва II рода, если хотя бы один из односторонних пределов в точке x_0 не существует.

Разрыв II рода называется бесконечным, если хотя бы один из односторонних пределов бесконечен.

Пример 1. $y = f(x) = \begin{cases} x, x < 1 \\ x - 2, x \geq 1 \end{cases}$. $f(x_0) = f(1) = -1$



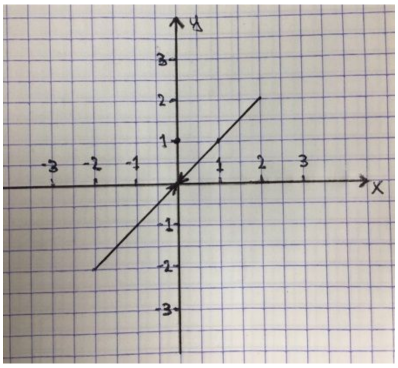
$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} x = 1;$$

$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} (x - 2) = -1$$

Функция непрерывна справа, не является непрерывной слева.

Следовательно, функция не является непрерывной в точке $x = 1$.

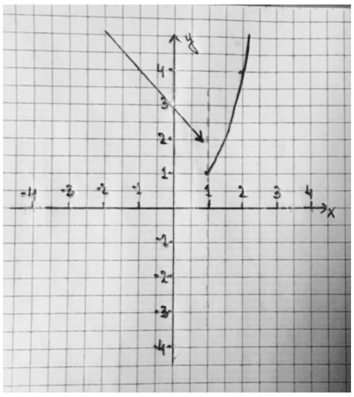
Пример 2. $y = f(x) = \begin{cases} x, x \neq 0; \\ 1, x = 0. \end{cases}$



$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(-0) = f(+0)$. Но $f(0) = 1$. Разрыв I рода, устранимый. Положив $f(0) = 0$, получим непрерывную функцию.

Пример 3.

$$y = \begin{cases} 3 - x, & x < 1 \\ x^2, & x \geq 1 \end{cases}$$



$\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1-0} (3 - x) = 2$ (левый предел)

$\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+0} x^2 = 1$ (правый предел)

Разность между правым и левым пределом называется скачком:

Скачок равен 1-2=-1.

Функция не является непрерывной.

Разрыв I рода.

Вывод: Для того, чтобы определять виды точек разрыва функции, нужно уверенно находить пределы. Нахождение точек разрыва функции может быть как самостоятельной задачей, так и частью полного исследования функции и построения графика. Графики функций необходимо учиться строить на занятиях по математическому анализу, математике и пр.

Список литературы:

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М., 1969 г.

2. Миронов Н.П. Лекции по математическому анализу. Введение в анализ, 2. (Непрерывность. Элементарные функции.) Пособие для студентов физико- математического факультета. Елабуга, 1997 год.

3. Миронова Ю.Н. Некоторые топологические свойства лексикографически упорядоченного квадрата // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2015. – № 12-10. – С. 1908-1909. URL: http://www.applied-research.ru/ru/article/view?id=8408 (дата обращения: 11.02.2016).

4. Матвеева А.Е., Макарова Н.В., Миронова Ю.Н. Интегрирование по частям как метод вычисления интегралов // Международный журнал экспериментального образования. 2016. № 3-1. С. 128-129. URL: http://www.expeducation.ru/ru/article/view?id=9687 (дата обращения: 11.04.2016).

5. Игдеев А.Р., Суржикова О.В. Предел функции в точке// Всероссийская научно-практическая конференция «Математика в высшей школе». 2016. http://econf.rae.ru/article/10313 (дата обращения: 05.12.2016).