

Предел сложной функции.

Митрюхина Ольга Викторовна

1 курс, факультет математики и естественных наук,

Елабужский институт КФУ,

Матвеева Анастасия Евгеньевна

3 курс, факультет математики и естественных наук,

Елабужский институт КФУ,

Научный руководитель: Миронова Ю. Н,

Кандидат физ.-мат. наук, профессор РАЕ,

Доцент кафедры математики и прикладной информатики

Елабужского института КФУ,

Казанский (Приволжский) федеральный университет.

Понятие предела является одним из основных понятий математического анализа, поэтому на первых курсах университетов ему отводится большая роль. Важно при изучении этого понятия добиться понимания терминологии и основных приемов вычисления пределов. Одним из способов вычисления пределов – является вычисление предела сложной функции. Имеет место следующая теорема:

Теорема: Пусть существует $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ $f(x) \neq y_0$ при $x \neq x_0$ и существует

$\lim_{y \rightarrow y_0} F(y)$. Тогда при $x \rightarrow x_0$ существует предел сложной функции $F(f(x))$,

причем $\lim_{x \rightarrow x_0} F(f(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} F(y)$.

Теорема о пределе сложной функции лежит в основе вычисления пределов с помощью метода подстановки (замены переменного).

Сущность этого метода мы поясним на примерах.

Пример 1. Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$$

Решение:

Пусть $\sqrt[6]{x} = y$, где $y \rightarrow 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^3 - 1}{y^2 - 1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{(y - 1)(y^2 + y + 1)}{(y - 1)(y + 1)} = \frac{3}{2}$$

Пример 2. Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[8]{x} - 4}$$

Решение:

Пусть $\sqrt[6]{x} = y$, где $y \rightarrow 2$

$$\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[8]{x} - 4} = \lim_{y \rightarrow 2} \frac{y^3 - 8}{y^2 - 4} = \lim_{y \rightarrow 2} \frac{(y - 2)(y^2 + 2y + 4)}{(y - 2)(y + 2)} = \frac{12}{4} = 3$$

Пример 3. Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[m]{x} - 1} \quad (n \text{ и } m \text{ — целые числа})$$

Решение:

Пусть $\sqrt[nm]{x} = y$, где $y \rightarrow 1$

$$\lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^m - 1^m}{y^n - 1^n} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{(y - 1)(y^{m-1} + \dots + 1)}{(y - 1)(y^{n-1} + \dots + 1)} = \frac{m}{n}$$

Пример 4. Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

Решение:

$$\text{Так как } \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{2\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{2}\right)^2}{x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2,$$

А при $x \rightarrow 0$ и $\frac{x}{2} \rightarrow 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} \lim_{\frac{x}{2} \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = 1$$

Таким образом, мы рассмотрели понятие предела сложной функции, а также примеры, которые могут быть использованы на занятиях по математическому анализу для студентов первых курсов университетов.

Список литературы:

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М., 1969 г.
2. Матвеева А.Е., Макарова Н.В., Миронова Ю.Н. Интегрирование по частям как метод вычисления интегралов // Международный журнал экспериментального образования. 2016. № 3-1. С. 128-129. URL: <http://www.expeducation.ru/ru/article/view?id=9687> (дата обращения: 11.04.2016).
3. Миронов Н.П. Лекции по математическому анализу. Введение в анализ, 1. (Действительные числа. Функции. Пределы.) Пособие для студентов физико-математического факультета. Елабуга, 1997 год.
4. Миронова Ю.Н. Некоторые топологические свойства лексикографически упорядоченного квадрата // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2015. – № 12-10. – С. 1908-1909. URL: <http://www.applied-research.ru/ru/article/view?id=8408> (дата обращения: 11.02.2016).
5. И.М. Уваренков, М.З. Маллер. Курс математического анализа. Москва, 1966 год.