Наглядные рассуждения.

Многие доказательства в школьной геометрии можно точно выражать рисунками без буквенных обозначений, если использовать полузнаковый язык и статическую мультипликацию.

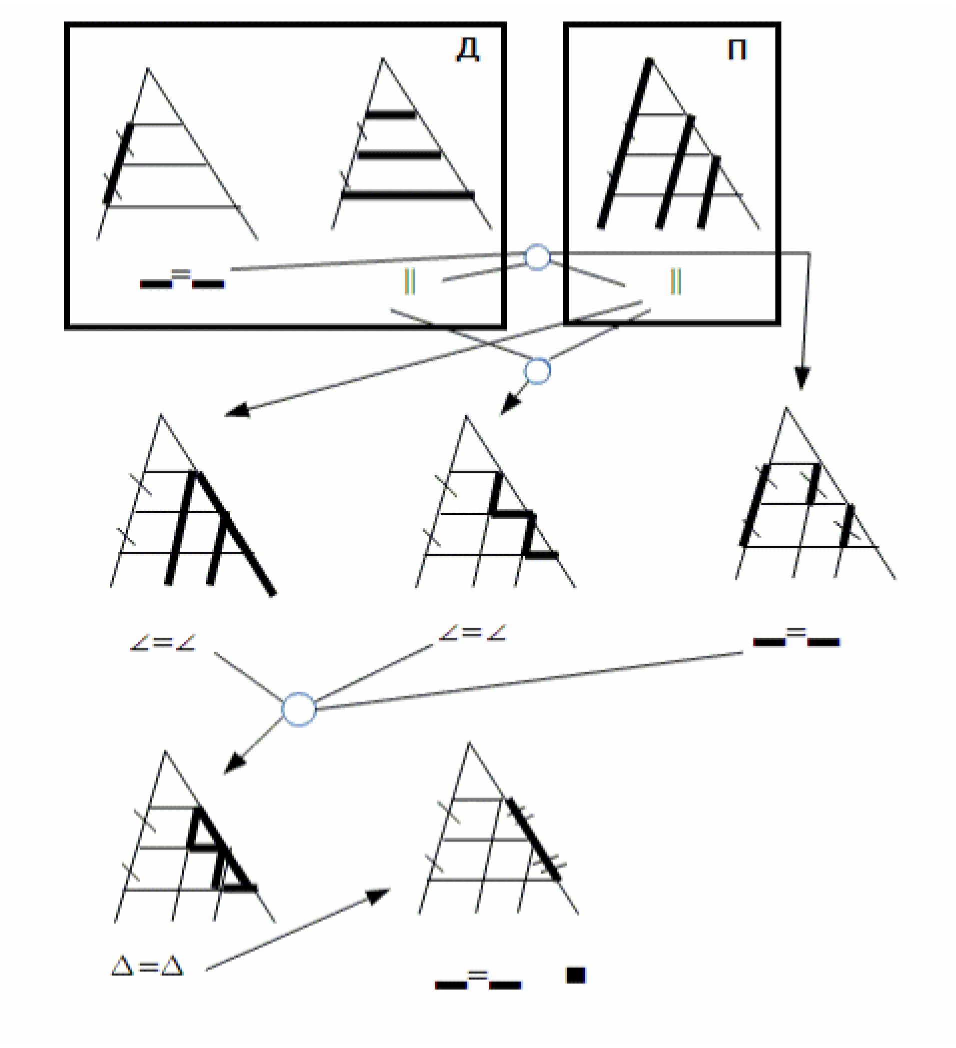
Под ***статической мультипликацией*** здесь понимается дублирование рисунка в нескольких кадрах, при котором в отдельном кадре некоторые элементы рисунка могут быть опущены, некоторые добавлены, и некоторые выделены. Совокупность кадров называем *мультирисунком*, рисунок, получающийся наложением кадров – *суммой* этих кадров, а сумму всех кадров мультирисунка, но без выделения элементов – суммой мультирисунка. Считаем, что кадры всегда могут быть наложены друг на друга, одинаково расположенные элементы в разных кадрах одного мультирисунка обозначают один и тот же геометрический объект.
Логический смысл геометрического рисунка – конъюнкция предикатов над геометрическими объектами разных типов: точка, отрезок, прямая, луч, дуга, окружность и т. д. Типы геометрических объектов можно отображать сортами в многосортной логике или унарными предикатами в обычной логике предикатов.
Условимся, что любой элемент (геометрический объект), изображённый на рисунке, является константой, если он помечен именем или значением этой константы, и свободной переменной, если не помечен.
Геометрические знаки сложнее буквенных. Например, знак π обозначает определённое число, мы умеем распознать этот знак при разных начертаниях, отличающихся размерами и формой; «+» – знак определённой функции, и т. д. Размещая знаки констант, переменных, функций, предикатов, логических операций по определённым правилам, можем построить знак сложной формулы. В геометрических рисунках также есть элементарные знаки: изображение геометрических элементов – точки, отрезка, дуги, окружности, прямой, луча, и изображение отношений между элементами: пересечения отрезков, примыкания отрезков, расположенности точки на прямой, отрезков –на одной прямой, параллельности, перпендикулярности, равенства отрезков, равенства углов и т. д.
Рисунок представляет сложную формулу — конъюнкцию отношений между несколькими элементами. Но, в отличие от алгебраических формул, мы не можем свободно комбинировать любые элементарные отношения между любыми геометрическими элементами на одном рисунке.
При доказательстве на каждом его шаге нужно говорить об отдельных элементах и отношениях, а не обо всех, представленных рисунком. Это можно делать двумя способами: выделением элементов на рисунке и дополнением рисунка логическими формулами, а также сочетанием этих способов. Обычно используется крайний вариант: доказательство записывается логическими формулами, а рисунок только иллюстрирует его. Но если использовать выделение элементов рисунка и рассматривать на данном шаге только отношения между выделенными элементами, то выбрать нужное отношение из представленных этой частью

рисунка проще; обычно в дополняющей надписи становится излишним именование элементов, достаточно указать только тип выделяемого отношения. Даже если формально присутствует неоднозначность, она обычно с очевидностью устраняется надписью и контекстом, так что совокупность рисунка с надписью можно считать распознаваемым знаком.

Пример изображения доказательства геометрической теоремы.

Сокращённые обозначения в надписях: Д – «дано»; П – «дополнительное построение»; ■ – «что и требовалось доказать»; ▬=▬ – «выделенные отрезки равны»; ∠=∠ –«выделенные углы равны»; Δ=Δ –«выделенные треугольники равны»; || – «выделенные прямые (или отрезки) параллельны». Каждый шаг доказательства изображаем кружком, к которому подходят линии, идущие от кадров, изображающих посылки, и из которого исходит стрелка, идущая к кадру, изображающему следствие этих посылок (получается бидольный ориентированный граф с паросочетанием вершин шагов доказательства с вершинами кадров).

Теорема.
Если на одной стороне угла отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие другую сторону угла, то и на этой стороне угла отложатся равные между собой отрезки.



Геометрический рисунок можно рассматривать как конвенциональный знак [1] - знаковую модель абстрактного геометрического объекта, сложный предикат, как было описано, но его также можно рассматривать и как образ - аналоговую модель этого объекта. Рисунок должен быть похож на объект, чтобы помогать интуиции, например, равные элементы должны изображаться приблизительно равными. Более того, язык знаковых моделей всегда (не только для геометрии) можно построить из языка аналоговых моделей, условившись, какие распознаваемые разновидности фрагментов моделей и какие метки будут применяться для обозначения объектов и отношений. Но этот язык сохранит черты аналоговой модели в том, что не любые логические комбинации элементарных формул при целесообразных (простых и наглядных) обозначениях могут быть изображены единым знаком (а не несколькими знаками на местах атомов логической формулы). Будем называть этот язык ***полузнаковым.*** Например, не целесообразно, по-видимому, вводить обозначения, позволяющие наглядно записать аксиомы о параллельных прямых.
Если требуется доказать некоторое общее утверждение (в приведённом примере нужно было доказать равенство отрезков), его можно сначала проверить на аналоговой модели, варьируя аналоговое представление исходных утверждений, но затем нужно доказать в общем случае, на знаковой модели. Это можно делать, используя комбинацию полузнакового и знакового языков.

Литература.

1. Агеев В. Семиотика. М.: Издательство «Весь мир», 2002.