Предел функции в точке

Игдеев Артем Робертович
1 курс, факультет математики и естественных наук,
Елабужский институт КФУ,
Суржикова Оксана Вячеславовна
3 курс, факультет математики и естественных наук,
Елабужский институт КФУ,
Научный руководитель: Миронова Ю. Н.,
Кандидат физ.-мат. наук, профессор РАЕ,
Доцент кафедры математики и прикладной информатики
Елабужского института КФУ,
Казанский (Приволжский) федеральный университет.

Пусть задано некоторое числовое множество $X \subset R$ и каждому $x \in X$ поставлено в соответствие число $y \in R$, тогда говорят, что на множествеX задана функция $y = f(x), x \in X$.

Точка х называется предельной точкой множества М, если в любой окрестности точки х содержится хотя бы $x_1 \in M$, $x_1 = x$, или иначе, точка х называется предельной точкой множества М, если в любой окрестности точки х содержится бесконечное множество точек множества М, отличных от х.

Пусть $y = f(x)$ определена на (a, b), кроме, быть может, точки $x_0 \in (a, b)$.

Определение 1 (по Гейне).

Число А называется пределом функции$f(x)$в точке x_0 , если для любой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $x_n \in (a, b), x_n \neq x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ выполняется равенство:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$$

Если такое число А существует, то говорят, что$y = f(x)$имеет предел в точке x_0и пишут:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A, \qquad \text{или} \quad f(x) \to A \text{ при } x \to x_0$$

Определение 2 (по Коши).

Число А называется пределом функции $f(x)$в точке x_0 , если для всякого наперед заданного как угодно малого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что $\forall x \in (a, b)$, удовлетворяющих условиям $|x - x_0| < \delta,\ x \neq x_0$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Число δ зависит только отε и потому пишут $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Рассмотрим примеры:

Пример 1.

Доказать, что

$$\lim_{x\to 2}(5x - 1) = 9$$

Решение.

Возьмем $\varepsilon > 0$. Для него найдем число $\delta > 0$, удовлетворяющее условиям определения 2.

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

$$|f(x) - 9| = |5x - 1 - 9| = |5x - 10|$$

$$|5x - 10| < \varepsilon$$

$$5|x - 2| < \varepsilon$$

$$\left| x-2 \right| < \frac{\varepsilon}{5} => \delta = \frac{\varepsilon}{5}$$

Пример 2.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{3-2x}-1\right)\left(\sqrt{7-3x}+2\right)\left(\sqrt{3-2x}+1\right)}{\left(\sqrt{7-3x}-2\right)\left(\sqrt{7-3x}+2\right)\left(\sqrt{3-2x}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(2-2x)(\sqrt{7-3x}+2)}{(3-3x)(\sqrt{3-2x}+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{2(1-x)(\sqrt{7-3x}+2)}{3(1-x)(\sqrt{3-2x}+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{2(\sqrt{7-3x}+2)}{3(\sqrt{3-2x}+1)} = \frac{4}{3}$$

Пример 3.

$$\lim_{x\to 9}\frac{x^2-10x+9}{\sqrt{x}-3} = \lim_{x\to 9}\frac{(\sqrt{x}+3)(x-9)(x+1)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \lim_{x\to 9}\left(\sqrt{x}+3\right)(x+1) = 48$$

Пример 4.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x+x^2-3}{(1-x)(x^2+x+1)}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+x-2}{(1-x)(x^2+x+1)}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-1)(x+2)}{-(x-1)(x^2+x+1)}\right) = \lim_{x\to 1}\left(-\frac{x+2}{x^2+x+1}\right) = -1$$

Таким образом, мы рассмотрели понятие предела функции в точке, а также примеры, которые могут быть использованы на занятиях по математическому анализу для студентов первых курсов университетов.

Список литературы:

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М., 1969 г.
2. Миронов Н.П. Лекции по математическому анализу. Введение в анализ, 1. (Действительные числа. Функции. Пределы.) Пособие для студентов физико- математического факультета. Елабуга, 1997 год.
3. Миронова Ю.Н. Некоторые топологические свойства лексикографически упорядоченного квадрата // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2015. – № 12-10. – С. 1908-1909. URL: http://www.applied-research.ru/ru/article/view?id=8408 (дата обращения: 11.02.2016).
4. Матвеева А.Е., Макарова Н.В., Миронова Ю.Н. Интегрирование по частям как метод вычисления интегралов // Международный журнал экспериментального образования. 2016. № 3-1. С. 128-129. URL: http://www.expeducation.ru/ru/article/view?id=9687 (дата обращения: 11.04.2016).