КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Ишманова К.В., Хафизова Н.Н.

Научный руководитель: Миронова Ю.Н.,

кандидат физ.-мат. наук, профессор РАЕ.

Всякое комплексное число zимеет вид $z = x + iy$, где x и y – действительные числа, а i мнимая единица; xназывается действительной частью числа z и обозначается Rez, yназывается мнимой частью z и обозначается Imz. [Маркушевич 1977:4-7]

$x = \mathrm{Re}(x + iy)$

$y = \mathrm{Im}(x + iy)$

Например: $\mathrm{Re}(1 - 3i) = 1, \mathrm{Im}(1 - 3i) = -3$.

Геометрическая иллюстрация.

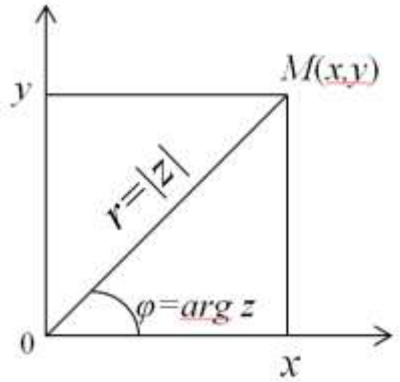

Рис. 1 Геометрическое изображение комплексного числа.

Длина вектора z называется модулем комплексного числа z и обозначается |z| или r. Очевидно, что $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Угол α называется аргументом числа z и обозначается символом Argz. Только одно значение α аргумента z удовлетворяет условию $-\pi < \alpha \le \pi$; оно называется главным аргументом и обозначается argz. Итак, $-\pi < ardz \le \pi$.

$Arg\ z = \arg z + 2\pi\kappa\ (\kappa = 0, \pm 1, \pm 2, ..)$.

Для главного значения аргумента справедливы соотношения:

$$\arg z = \begin{cases} arctg\ \dfrac{y}{x}, x > o \\ arctg\ \dfrac{y}{x} + \pi, если\ \ x < 0, y \ge 0 \\ arctg\ \dfrac{y}{x}, если\ \ x < 0, y < 0 \end{cases}$$

Число z=x-iy называется комплексно-сопряженным к z=x+iy и обозначается $\bar{z}$. Точки z и $\bar{z}$ симметричны относительно действительной оси.

Поэтому |z|=|$\bar{z}$|, а argz=-argz. Сопряженным к $\bar{z}$ является само число z, т.е $\bar{\bar{z}} = z$.

Перейдем к определению операций над комплексными числами

1.Сложение.

Сложение комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ определяется равенством $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$. Геометрически сложение чисел z_1 и z_2 производится по правилу сложения векторов. Сложение допускает обратную операцию: для любых двух комплексных чисел

$z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ можно найти такое число z, что $z_2 + z = z_1$. Это число называется разностью чисел z_1 и z_2 и обозначается $z_1 - z_2$.Очевидно, $z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$.

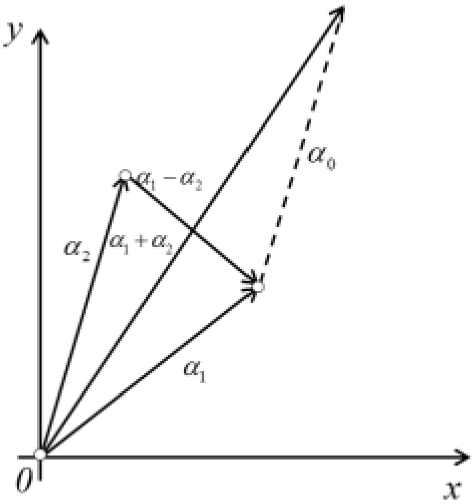

Рис. 2 Сложение и вычитание комплексных чисел.

2. Умножение.

Произведение двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ определяется по формуле: $z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i(x_{1.} y_2 + x_2 \cdot y_1)$.[Лаврентьев 1987:9]

Дадим геометрическое истолкование умножения чисел. Если $z = x + iy$, то

$x = z\cos\alpha = |z| \cdot \cos(Argz)$

$y = z\sin\alpha = |z| \cdot \sin(Argz)$.

Всякое комплексное число, отличное от нуля, можно представить в тригонометрической форме:

$z = x + iy = |z|\cos\alpha + i|z|\sin\alpha = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

Для произведения z_1 и z_2 в тригонометрической форме получим:

$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$.

3. Возведение в целую степень. Произведение n равных чисел z называется n-й степенью числа z и обозначается символом z^n.

$z^n = z \ldots z(n$ раз).

$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$,(φ - аргумент z).

4.Обратная операция – извлечение корня. [Лаврентьев 1987:12]

Число ω называется корнем n-й степени из числа z, если ω^n=z. Обозначается символом $\sqrt[n]{z}$. Пусть $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $\omega = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$.Тогда,

$\rho^n(\cos(n\psi) + i\sin(n\psi)) = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

Отсюда $\rho = \sqrt[n]{|z|}$, $\psi = \dfrac{\alpha + 2k\pi}{n}$,то есть $\omega = \sqrt[n]{r}(\cos\dfrac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\alpha + 2k\pi}{n})$,(k=0,±1, …).

Здесь ω принимает только празличных значений. Если k_1и k_2отличаются на целое, кратное n,то дроби $\dfrac{\alpha + 2k_1\pi}{n}$ и $\dfrac{\alpha + 2k_2\pi}{n}$ отличаются на число, кратное 2π. Благодаря периодичности cost isint значения ω будут одинаковы.

Пример 1. [Епихин 2008:9]Вычислить $\sqrt[4]{-1}$ и изобразить корни на комплексной плоскости.

Решение: Представим число -1 в тригонометрической форме, для этого найдем его модуль и аргумент:

$$r = \left|-1\right| = 1$$

Тогда $z = 1 \cdot (\cos \pi \cdot i \sin \pi)$.

Корни четвертой степени найдем, используя формулу Муавра

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n}),\ k = \overline{0, n-1}.$$

В нашем случае k=0,1,2,3. Найдем значения выражения для каждого k:

$$Z_0 = \sqrt[4]{1}(\cos \frac{\pi + 2\pi \cdot 0}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi \cdot 0}{4}) = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$Z_1 = \sqrt[4]{1}(\cos \frac{\pi + 2\pi \cdot 1}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi \cdot 1}{4}) = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$Z_2 = \sqrt[4]{1}(\cos \frac{\pi + 2\pi \cdot 2}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi \cdot 2}{4}) = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$Z_3 = \sqrt[4]{1}(\cos \frac{\pi + 2\pi \cdot 3}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi \cdot 3}{4}) = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Полученные корни можно изобразить на комплексной плоскости. Они будут точками, лежащими на окружности с центром в начале координат и радиусом $\sqrt[4]{r}$ 1, а центральные углы между радиусами, проведенными в соседние точки, равны $\frac{\pi}{2}$.

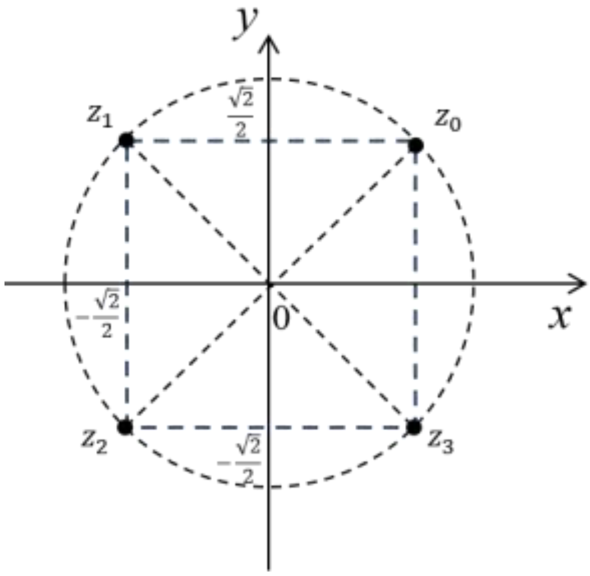

Рис. 3

Пример 2. [Лунц:2002:56] Вычислите корни третьей степени из комплексного числа 2+2i.

Решение:

Найдем тригонометрическую форму данного числа:

$$\left|2 + 2i\right| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

Точка 2+2i лежит в первой четверти, $\arg(2 + 2i) = \frac{\pi}{4}$.

$$2 + 2i = \sqrt{8 \cdot (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})}.$$

Где k приобретает значения 0,1,2. Запишем полученные корни:

$$Z_0 = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}),$$

$$z_1 = \sqrt{2}(\cos(\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) = \sqrt{2}(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}),$$

$$z_2 = \sqrt{2}(\cos(\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}) = \sqrt{2}(-\sin\frac{\pi}{12} - i\cos\frac{\pi}{12}).$$

Используя формулы для косинуса и синуса разности углов, получаем:

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}),$$

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}).$$

Ответ: $\left\{\frac{\sqrt{3+1}}{2} + i\frac{\sqrt{3-1}}{2}, -1 + i, \frac{-\sqrt{3-1}}{2} - i\frac{\sqrt{3+1}}{2}\right\}$.

Литература.

1. Епихин В.Е. Комплексные числа: методическая разработка для учащихся заочного отделения, Москва-2008.
2. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного.-М.:Наука,1987.
3. Лунц Г.Л. Функции комплексного переменного.-М.:2002.
4. Маркушевич А.И. Ведение в теорию аналитических функций.-М.:просвещение,1977.