Применение условий Коши-Римана для нахождения производной функции комплексной переменной

Галиуллина Гузель Анасовна

3 курс, Казанский (Приволжский) федеральный университет,

Елабужский институт КФУ, физико-математический факультет

Научный руководитель: Миронова Ю.Н.,

кандидат физ.-мат. наук, профессор РАЕ,

доцент кафедры математического анализа,

алгебры и геометрии Елабужского института КФУ,

Казанский (Приволжский) федеральный университет.

Пусть на $G \in C$ задана функция $w = f(z) = u + iv$, где $z = x + iy$. Придадим z приращение $\Delta z : \Delta z = \Delta x + i\Delta y$, причем $z + \Delta z \in G$. Тогда функция также получит приращение $\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z) = \Delta u + i\Delta v.$.

Определение. Если существует $\lim\limits_{\Delta z \to 0, z_0 + \Delta z \in E} \dfrac{\Delta w}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z \to 0, z_0 + \Delta z \in E} \dfrac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$, то этот предел называется производной функции $f(z)$ по множеству E в точке z_0 и обозначается $f'_E(z_0)$ (или просто $f'(z_0)$), а функция $f(z)$ называется дифференцируемой по множеству E в точке z_0 [Миронов, 2007: 21].

Таким образом, производной функции $f(z)$ в точке z_0 называется предел разностного отношения:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}, \qquad (1)$$

если он существует и не зависит от способа устремления $\Delta z = z - z_0$ к нулю. Последнее требование явно указано с целью подчеркнуть отличия по отношению к функциям действительной переменной, хотя, как правило, оно не приводится, так как относится к определению комплексного аналога предела. Требование дифференцируемости $f(z)$ в точке z_0 накладывает важные условия на свойства ее действительной и мнимой частей и их производных, которые должны подчиняться соотношениям:

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}, \qquad (2)$$

которые называются условиями Коши-Римана, здесь $z_0 = x_0 + iy_0$ и $f(z_0) = u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)$

Теорема 1. Для дифференцируемости функции $w = f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$, необходимо и достаточно, чтобы:

1) ее действительная часть $u(x, y)$ были дифференцируемыми функциями в точке (x_0, y_0);

2) в точке (x_0, y_0) выполнялись условия Коши-Римана (Даламбера-Эйлера) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$.

Тогда $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$.

[Миронов, 2007: 24].

Задача 1. Доказать дифференцируемость во всей плоскости функции: $w = z$. Найти ее производную.

Решение.

По определению производной для любой точки $z \in C$ записываем

$\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{(z + \Delta z) - z}{\Delta z} = 1;$ предел существует для любой точки $z \in C$

Производная: $z' = 1$.

Задача 2. Проверить выполнение условий Коши-Римана для функции $w = f(z) = \dfrac{z^2}{2} - 5i$. В случае выполнения условий Коши-Римана, найти производную функции.

Решение: Так как $z = x + iy$, то:

$$f(z) = \frac{(x+iy)^2}{2} - 5i = \frac{x^2 + 2xyi - y^2}{2} - 5i = \frac{x^2}{2} + xyi - \frac{y^2}{2} - 5i =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + (xy - 5)i$$

Таким образом:

$u(x, y) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{2}$ – действительная часть функции $f(z)$;

$v(x, y) = xy - 5$ – мнимая часть функции $f(z)$.

Проверим выполнение условий Коши-Римана. Начнем с проверки условия $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{2} - 0 = x;$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = x - 0 = x;$$

Таким образом, условие $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ выполнено.

Проверяем выполнение второго условия $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 - \frac{2y}{2} = -y;$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = y - 0 = y \;;$$

Получилось одно и то же, но с противоположными знаками, то есть, условие $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ также выполнено.

Условия Коши-Римана выполнены, следовательно, функция дифференцируема на всей комплексной плоскости.

Найдём производную функции. Производная тоже очень простая и находится по обычным правилам:

$$f'(z) = \left(\frac{z^2}{2} - 5i\right)' = \frac{2z}{2} - 0 = z.$$

Задача 3. Определить действительную $u(x,y)$ и мнимую $v(x,y)$ части функции $w = f(z) = z^3 + 3iz.$ Проверить выполнение условий Коши-Римана. Вычислить $f'(0).$

Решение: определим действительную и мнимую части данной функции.

Так как $z = x + iy$, то:

$$f(z) = (x+iy)^3 + 3i(x+iy) = x^3 + 3x^2iy - 3xy^2 - y^3i + 3xi - 3y =$$
$$= x^3 - 3xy^2 - 3y + (3x^2y + 3x - y^3)i$$

Таким образом:

$u(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 3y -$ действительная часть функции $f(z)$;

$v(x,y) = 3x^2y + 3x - y^3 -$ мнимая часть функции $f(z)$.

Проверим выполнение условий Коши - Римана:

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}} = 3\mathrm{x}^2 - 3\mathrm{y}^2; \;\; \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}} = 3\mathrm{x}^2 - 3\mathrm{y}^2 \Rightarrow \;\; \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}} = -6\mathrm{xy} - 3; \; \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{x}} = 6\mathrm{xy} + 3 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Условия Коши- Римана выполнены, следовательно, функция дифференцируема на всей комплексной плоскости.

$$f'(z) = (z^3 + 3iz)' = 3z^2 + 3i$$

$$f'(0) = 0 + 3i = 3i$$

Литература:

1. Миронов А.Н., Миронова Ю.Н. Теория функций комплексной переменной: учебное пособие. – Елабуга: Изд-во ЕГПУ, 2007. – 123 с.
2. http://physic.kemsu.ru/pub/library/learn_pos/met/node9.html
3. http://www.apmath.spbu.ru/ru/staff/starkov/tfkp-part1.pdf
4. http://www.mathprofi.ru/funkcii_kompleksnoi_peremennoi.html