ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ПРОВОДЯЩЕЙ КАПЛИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Ансокова З.В.
Кабардино-Балкарский государственный университет им.Х.М.Бербекова, Россия, г. Нальчик
Колледж информационных технологий и экономики
E-mail: zaira-ansokova@mail.ru

Движение свободой поверхности h капли в электромагнитном поле описывается уравнением:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{\nu\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left\{ \frac{h^3}{3}\left[ j_0 B_0 (1+\sin\ \omega t)\frac{\partial h}{\partial x} - \sigma_{23}\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right] \right\} \qquad \textbf{(1)}$$

Это уравнение является квазилинейным вырождающимся уравнением параболического типа[1].

Метод квазилинеаризации численного решения краевых задач на базе уравнения (1) основан на построении последовательности решений соответствующих квазилинеаризованных задач.

Движение свободой поверхности h капли в электромагнитном поле описывается уравнением:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{\nu\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left\{ \frac{h^3}{3}\left[ j_0 B_0 (1+\sin\ \omega t)\frac{\partial h}{\partial x} - \sigma_{23}\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right] \right\} \qquad \textbf{(1)}$$

Это уравнение является квазилинейным вырождающимся уравнением параболического типа[1].

Метод квазилинеаризации численного решения краевых задач на базе уравнения (1) основан на построении последовательности решений соответствующих квазилинеаризованных задач.

Данная работа посвящена разработке численного метода решения задачи:

В области $D = \{(x,t): 0 < x < l, 0 < t \le T\}$ для дифференциального уравнения 4-го порядка

$$U_t = \left(k(x,t)\cdot \kappa_0(t) U_x - \varepsilon U_{xxx}\right)_x + g(x,t) \qquad \textbf{(2)}$$

рассмотрим задачу: найти решение уравнения (2), удовлетворяющего следующим условиям:

$$U(0,t) = 0, \qquad 0 \le t \le T, \qquad \textbf{(3)}$$

$$U(l,t) = 0, \qquad 0 \le t \le T, \qquad \textbf{(4)}$$

$$k(0,t)\kappa_0(t)U_x(0,t) - \varepsilon U_{xxx}(0,t) = 0,\ 0 \le t \le T, \qquad \textbf{(5)}$$

$$k(l,t)\kappa_0(t)U_x(l,t) - \varepsilon U_{xxx}(l,t) = 0,\ 0 \le t \le T, \qquad \textbf{(6)}$$

$$U(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l. \qquad \textbf{(7)}$$

Требуется также выполнение условий согласования

$$U(0,0) = \varphi(0) = 0; \quad U(l,0) = \varphi(l) = 0.$$

$$U_x(0,0) = \varphi'(0), \quad U_x(l,0) = \varphi'(l)$$

$$U_{xxx}(0,0) = \varphi'''(0), U_{xxx}(l,0) = \varphi'''(l).$$

Цель данной работы

- разработка численного метода решения задачи (13)-(19), а именно
- построение конечно-разностной схемы, аппроксимирующей задачу с порядком $O(h^2 + \tau)$;

- разработка алгоритма решения разностной схемы;
- проверка разработанного метода на тестовых примерах.

1) Построена конечно-разностная схема

$$C_0 y_0 - D_0 y_1 + E_0 y_2 = F_0 , \quad \textbf{(8)}$$

$$-B_1 y_0 + C_1 y_1 - D_1 y_2 + E_1 y_3 = F_1, \quad \textbf{(9)}$$

$$A_i y_{i-2} + B_i y_{i-1} + C_i y_i - D_i y_{i+1} + E_i y_{i+2} = F_i , \qquad 2 \le i \le n-2 \quad \textbf{(10)}$$

$$A_{n-1} y_{n-3} - B_{n-1} y_{n-2} + C_{n-1} y_{n-1} - D_{n-1} y_n = F_{n-1}, \quad \textbf{(11)}$$

$$A_n y_{n-2} - B_n y_{n-1} + C_n y_n = F_n . \quad \textbf{(12)}$$

аппроксимирующая задачу (3)-(7) с порядком $O\left(h^2 + \tau\right)$, где коэффициенты вычисляются в зависимости от коэффициентов уравнения (2) и параметров сетки $h$ и $\tau$ .

$$A_i = \frac{\varepsilon}{h^2} \cdot a_i ; a_i = \frac{1}{2}(k(x_{i-1}, t) + k(x_i, t));$$

$$E_i = \frac{\varepsilon}{h^2} \cdot a_i ;$$

$$B_i = a_i \hat{\kappa}_0 + E_i + 3A_i ;$$

$$C_i = \left(B_i - E_i\right) + \left(D_i - A_i\right) + \frac{h^2}{\tau};$$

$$F_i = \frac{h^2}{\tau} y_i . \quad \textbf{(14)}$$

$$C_0 = 1,\ D_0 = 0,\ E_0 = 0,\ F_0 = 0. \quad \textbf{(15)}$$

$$C_n = 1,\ A_n = 0,\ B_n = 0,\ F_n = 0. \quad \textbf{(16)}$$

$$-B_1 \hat{y}_0 + C_1 \hat{y}_1 - D_1 \hat{y}_2 + E_1 \hat{y}_3 = F_1, \quad \textbf{(17)}$$

где

$$B_1 = \frac{\alpha l_3 l_2}{m l_3 - n d_3} - a_2 ;$$

$$C_1 = \frac{(\beta l_3 - n a_3) l_2}{m l_3 - n d_3} - b_2 ;$$

$$D_1 = \frac{(\gamma l_3 - n b_3) l_2}{m l_3 - n d_3} - c_2 ;$$

$$E_1 = \frac{(\delta l_3 - n c_3) l_2}{m l_3 - n d_3} - d_2 ;$$

$$F_1 = f_2 + \frac{(\varphi l_3 - n f_3) l_2}{m l_3 - n d_3} .$$

На каждом шаге по времени приходим к системе линейных алгебраических уравнений с пятидиагональной матрицей (8)-(12), коэффициенты которые вычисляются по соответствующим формулам. Эта система решается методом немонотонной прогонки для пятиточечных систем[2].

2) Разработан метод решения конечно-разностной схемы.
3) На алгоритмическом языке PASCAL составлена программа, реализующая разработанный метод.
4) Разработанный метод проверен на тестовых примерах. Результаты расчетов подтверждают, что приближенное решение совпадает с точным с порядком $O\left(h^2+\tau\right)$.
Рассмотрим тестовые примеры

**Тестовый пример №1**

По программе KAPLIA был просчитан тестовый пример при следующих входных данных:

$l=1$, $\varphi$(x)=$10(1-(\exp(x)+\exp(1-x))/(e+1))$, k(x,t)=1, $\chi_0$(t)=1, $\varepsilon$=1 ,

g(x,t)= $-10\exp(-t)(1-(\exp(x)+\exp(1-x))/(e+1))$.

Точным решением задачи будет функция

U(x,t)= $10\exp(-t)(1-(\exp(x)+\exp(1-x))/(e+1))$.

Результаты счета при различных h и $\tau$ показывают, что приближенное решение полученное по программе KAPLIA , отличается от точного на величину порядка O(h $^2+\tau)$ .

Результаты счета тестового примера №1

Расчетное время=1.00000
Длина расчетного отрезка =1.00000
Шаг по времени =0.10000
Шаг по пространству =0.08333

0.0000 0.3193 0.5776 0.7767 0.9179 1.0022 1.0303 1.0022 0.9179 0.7767 0.5776 0.3193 0.0000
0.0000 0.2909 0.5261 0.7075 0.8361 0.9129 0.9384 0.9129 0.8361 0.7075 0.5261 0.2909 0.0000
0.0000 0.2651 0.4796 0.6448 0.7620 0.8321 0.8553 0.8321 0.7620 0.6448 0.4796 0.2651 0.0000
0.0000 0.2418 0.4374 0.5881 0.6951 0.7589 0.7801 0.7589 0.6951 0.5881 0.4374 0.2418 0.0000
0.0000 0.2207 0.3993 0.5368 0.6344 0.6927 0.7121 0.6927 0.6344 0.5368 0.3993 0.2207 0.0000
0.0000 0.2016 0.3647 0.4904 0.5796 0.6329 0.6506 0.6329 0.5796 0.4904 0.3647 0.2016 0.0000
0.0000 0.1844 0.3335 0.4485 0.5300 0.5787 0.5949 0.5787 0.5300 0.4485 0.3335 0.1844 0.0000
0.0000 0.1688 0.3053 0.4105 0.4851 0.5297 0.5445 0.5297 0.4851 0.4105 0.3053 0.1688 0.0000
0.0000 0.1546 0.2797 0.3761 0.4445 0.4853 0.4989 0.4853 0.4445 0.3761 0.2797 0.1546 0.0000
0.0000 0.1419 0.2566 0.3450 0.4078 0.4452 0.4577 0.4452 0.4078 0.3450 0.2566 0.1419 0.0000

Точное решение

0.0000 0.3508 0.6346 0.8532 1.0084 1.1010 1.1318 1.1010 1.0084 0.8532 0.6346 0.3508 0.0000
0.0000 0.3174 0.5742 0.7720 0.9124 0.9962 1.0241 0.9962 0.9124 0.7720 0.5742 0.3174 0.0000
0.0000 0.2872 0.5195 0.6986 0.8256 0.9014 0.9266 0.9014 0.8256 0.6986 0.5195 0.2872 0.0000
0.0000 0.2599 0.4701 0.6321 0.7470 0.8156 0.8385 0.8156 0.7470 0.6321 0.4701 0.2599 0.0000
0.0000 0.2351 0.4254 0.5719 0.6759 0.7380 0.7587 0.7380 0.6759 0.5719 0.4254 0.2351 0.0000
0.0000 0.2128 0.3849 0.5175 0.6116 0.6678 0.6865 0.6678 0.6116 0.5175 0.3849 0.2128 0.0000
0.0000 0.1925 0.3483 0.4683 0.5534 0.6042 0.6212 0.6042 0.5534 0.4683 0.3483 0.1925 0.0000
0.0000 0.1742 0.3151 0.4237 0.5007 0.5467 0.5620 0.5467 0.5007 0.4237 0.3151 0.1742 0.0000
0.0000 0.1576 0.2851 0.3834 0.4531 0.4947 0.5086 0.4947 0.4531 0.3834 0.2851 0.1576 0.0000
0.0000 0.1426 0.2580 0.3469 0.4100 0.4476 0.4602 0.4476 0.4100 0.3469 0.2580 0.1426 0.0000
0.0000 0.1291 0.2334 0.3139 0.3710 0.4050 0.4164 0.4050 0.3710 0.3139 0.2334 0.1291 0.0000

**Тестовый пример №2**

По программе KAPLIA был просчитан тестовый пример при следующих входных данных:
$l=1$, $\varphi$(x)= $10(1-(\exp(x)+\exp(1-x))/(e+1))$, k(x,t)=1, $\chi_0$(t)=1, $\varepsilon$=1 , g(x,t)=0. Точное решение U(x,t)= $10(1-(\exp(x)+\exp(1-x))/(e+1))$.

Результаты счета тестового примера №2

Расчетное время =1.00000
Длина расчетного отрезка =1.00000
Шаг по времени =0.10000
Шаг по пространству =0.08333
EPS=1
0.0000 0.3511 0.6351 0.8540 1.0092 1.1020 1.1328 1.1020 1.0092 0.8540 0.6351 0.3511 0.0000
0.0000 0.3514 0.6357 0.8547 1.0101 1.1029 1.1338 1.1029 1.0101 0.8547 0.6357 0.3514 0.0000
0.0000 0.3517 0.6362 0.8555 1.0110 1.1039 1.1348 1.1039 1.0110 0.8555 0.6362 0.3517 0.0000
0.0000 0.3520 0.6368 0.8562 1.0119 1.1048 1.1357 1.1048 1.0119 0.8562 0.6368 0.3520 0.0000
0.0000 0.3523 0.6373 0.8569 1.0127 1.1058 1.1367 1.1058 1.0127 0.8569 0.6373 0.3523 0.0000
0.0000 0.3526 0.6379 0.8577 1.0136 1.1068 1.1377 1.1068 1.0136 0.8577 0.6379 0.3526 0.0000
0.0000 0.3529 0.6384 0.8584 1.0145 1.1077 1.1387 1.1077 1.0145 0.8584 0.6384 0.3529 0.0000
0.0000 0.3532 0.6390 0.8592 1.0154 1.1087 1.1397 1.1087 1.0154 0.8592 0.6390 0.3532 0.0000
0.0000 0.3536 0.6395 0.8599 1.0163 1.1096 1.1407 1.1096 1.0163 0.8599 0.6395 0.3536 0.0000
0.0000 0.3539 0.6401 0.8607 1.0172 1.1106 1.1417 1.1106 1.0172 0.8607 0.6401 0.3539 0.0000
Точное решение
0.0000 0.3508 0.6346 0.8532 1.0084 1.1010 1.1318 1.1010 1.0084 0.8532 0.6346 0.3508 0.0000
0.0000 0.3508 0.6346 0.8532 1.0084 1.1010 1.1318 1.1010 1.0084 0.8532 0.6346 0.3508 0.0000
0.0000 0.3508 0.6346 0.8532 1.0084 1.1010 1.1318 1.1010 1.0084 0.8532 0.6346 0.3508 0.0000
0.0000 0.3508 0.6346 0.8532 1.0084 1.1010 1.1318 1.1010 1.0084 0.8532 0.6346 0.3508 0.0000
0.0000 0.3508 0.6346 0.8532 1.0084 1.1010 1.1318 1.1010 1.0084 0.8532 0.6346 0.3508 0.0000
0.0000 0.3508 0.6346 0.8532 1.0084 1.1010 1.1318 1.1010 1.0084 0.8532 0.6346 0.3508 0.0000
0.0000 0.3508 0.6346 0.8532 1.0084 1.1010 1.1318 1.1010 1.0084 0.8532 0.6346 0.3508 0.0000
0.0000 0.3508 0.6346 0.8532 1.0084 1.1010 1.1318 1.1010 1.0084 0.8532 0.6346 0.3508 0.0000
0.0000 0.3508 0.6346 0.8532 1.0084 1.1010 1.1318 1.1010 1.0084 0.8532 0.6346 0.3508 0.0000
0.0000 0.3508 0.6346 0.8532 1.0084 1.1010 1.1318 1.1010 1.0084 0.8532 0.6346 0.3508 0.0000
0.0000 0.3508 0.6346 0.8532 1.0084 1.1010 1.1318 1.1010 1.0084 0.8532 0.6346 0.3508 0.0000

## Литература


1. Самарский А.А., Теория разностных схем. - М.: Наука, 1983.
2. Самарский А.А., Николаев Е.С., Методы решения сеточных уравнений.- М.: Наука, 1978.
3. Романов А.С., О движении малой капли частично смачивающей жидкости под действием переменного тока.//Инженерно-физический журнал, 1989.
4. Фаронов В.В., Turbo Pascal 7.0.- М.:Издательство “ОМД Групп ”, 2003.