Забытая теорема

Эрдниев Б.П., Горяев В.М., Эрдниев А.Б.

В Нюрнберге 1822 г. была опубликована работа немецкого математика Карла Вильгельма Фейербаха (1800-1834 гг.) “Свойства некоторых замечательных точек прямолинейного треугольника”, в которой была

доказана теорема, носящая сейчас его имя. Теорема Фейербаха: “Окружность, проведенная через основание высот треугольника, проходит через его стороны и касается вписанной и 3 вневписанных окружностей

этого треугольника”. Вписанной окружностью треугольника называется окружность касающаяся трех его сторон с внутренней стороны, её центр находится внутри. Вневписанной окружностью называется окружность,

которая касается одной из сторон треугольника и продолжений двух других сторон. Центр вписанной окружности обозначается как I-й индекс и он является точкой пересечения трех биссектрис. Центры вневписанных окружностей обозначены как J-й ортоцентр лежат на пересечении биссектрисы внутреннего угла и двух биссектрис внешних углов треугольника (I_a, I_b, I_c). Радиусы вписанных и вневписанных окружностей является компонентами формулы Герона:

$$(S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)});\ r = \frac{S}{p};r_a = \frac{S}{p-a};r_b = \frac{S}{p-b};r_c = \frac{S}{p-c}$$

Выделим проверочные формулы для положений центров в координатной плоскости:

$OI^2=R(R-2r)$

$OI_{a,b,c}^2 = R(R + 2r_{a,b,c})$

Эту окружность называется окружностью Эйлера, которая была ещё открыта 1765 г. Фейербах фактически переоткрыл окружность Эйлера, которая проходит через 3 вершины высотного треугольника ($\Delta N_{a,b,c}$)- 3 вершины высотного треугольника ($\Delta M_{a,b,c}$) - 3 медианного треугольника, соединяющих вершины с ортоцентром H, образующих так называемый треугольник Эйлера ($\Delta E_{a,b,c}$) . Эту окружность и называют окружностью 9 точек. Поэтому в современной формулировке в теореме Фейербаха дается понятие об окружности Эйлера: “Вписанная и 3 вневписанные окружности произвольного треугольника касаются окружности

Эйлера (Loenard Euler, 1707-1783 гг.) этого треугольника”. Сегодня эти точки обозначаются как F, F_a, F_b, F_c (точки Фейербаха - Feeirbah) - точка касания вписанной окружности и окружности Эйлера и окружности с центром E, которая является серединой отрезка, соединяющая центр описанной окружности O и ортоцентр H - точка пересечения высот треугольника, где H - первая буква в фамилии известного ирландского математика Гамильтона (William Hamilton), 1805-1865гг.. Существует глубокая методологическая связь, которая и не раскрыта и в наше время.

В 1861 г. известный ирландский математик Вильям Гамильтон, неожиданно открыл теорему, редко встречающаяся в пособиях и учебниках по геометрии. Её формулировка лаконична.

1) Если H - ортоцентр остроугольного ΔABC, то ортоцентры тупоугольных треугольников, находятся в точках C, B, A.

2) Высотный треугольник N_a, N_b, N_c остроугольного ΔABC является общим высотным треугольником для трех тупоугольных треугольников: ΔABH, ΔACH, ΔBCH. Вершины медианных треугольников M_{ij}, серединных треугольников E_{ij} для тупоугольных треугольников образуют новые комбинации 6 точек Эйлера, а ортоцентры их совпадают с вершинами $H_{1,2,3}$ совпадают с вершинами CBA.

3)окружность Эйлера ΔABC также является окружностью Эйлера для тупоугольных треугольников: ΔABH, ΔACH, ΔBCH.

Большая временная разница между этими событиями (40 лет) говорит о том, что немецкий математик К. Фейербах (1800-1834. Остается предположить, К. Фейербах не успел открыть теорему взаимности вершины треугольника с ортоцентром. Хотя в 1828 г. теорему Фейербаха переоткрыл, как это часто случается в науке, великий немецкий Якоб Штейнер (Jacob Steiner) 1796-1863 гг.Он увидел теорему У.Гамильтона: для обозначения центров описанных и вневписанных окружностей тупоугольных треугольников, радиусов мы вводим цифровую индексацию:

$O_{1,2,3}$ - центр описанных окружностей ABH, ACH, BCH.

$I_{1,2,3}$ – центр вписанных окружностей.

$r_{1,2,3}$ - радиусы 3 вписанных

r_{11} r_{12} r_{13}
r_{21} r_{22} r_{23} – радиусы 9 вневписанных окружностей
r_{31} r_{32} r_{33}

F и $F_{a,b,c}$ - 4 внутренние точки Фейербаха

$W_{1,2,3}$ и W_{ij} - 12 точек У.Гамильтона

J_{ij} - центры вневписанных окружностей тупоугольного треугольника

Для того, чтобы точки были хорошо различимы они должны иметь целочисленные координаты, которые естественно определяются из теории пифагоровых триад героновых треугольников