Интегрирование по частям как метод вычисления интегралов

Матвеева Анастасия Евгеньевна

Макарова Наталья Владимировна

2 курс, Казанский (Приволжский) федеральный университет,

Елабужский институт КФУ, физико-математический факультет

Научный руководитель: Миронова Ю. Н,

Кандидат физ.-мат. наук, профессор РАЕ,

Доцент кафедры математического анализа,

алгебры и геометрии Елабужского института КФУ,

Казанский (Приволжский) федеральный университет.

Один из методов вычисления интегралов, называемый интегрированием по частям, основан на правиле дифференцирования произведения двух функций. Рассмотрим функции $u = u(x), v = v(x)$, дифференцируемые на некотором промежутке X. Согласно свойствам дифференциалов, имеет место следующее равенство:

$$d(uv) = udv + vdu$$

Взяв неопределенный интеграл от обеих частей этого равенства, получим:

$$\int d(uv) = \int (udv + vdu).$$

Так как:

$$\int (udv + vdu) = \int udv + \int vdu,$$

то получаем:

$$uv + C = \int udv + \int vdu,$$

откуда

$$\int udv = uv + C - \int vdu.$$

Мы получили формулу интегрирования по частям:

$$\int udv = uv + C - \int vdu. \qquad (1)$$

Так как $\int vdu$ существует по условию, то $\int udv$ тоже существует. Метод используется следующим образом. В $\int f(x)dx$ выделяем u и dv, затем находим du, а из dv интегрированием находим v и используем формулу интегрирования по частям. u и dv нужно выбрать так , чтобы:

1) Из dvлегко находилась v;
2) $\int vdu$ вычислялся легче, чем $\int udv$

Замечание: иногда интегрирование по частям приходятся применять несколько раз.

Пример 1:

Вычислить интеграл $\int \ln x\, dx$

Решение: Положим $u = \ln x\,, dv = dx$. Тогда $du = \frac{dx}{x}, v = x$.

Используя формулу (1), получим :

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

Ответ: $\int \ln x\, dx = x \ln x - x + C$

Пример 2:

Вычислить интеграл $\int x^n \ln x\, dx$

Решение: Положим $u = \ln x\,, dv = x^n dx$. Тогда $du = \frac{1}{x}dx, v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Используя формулу (1), получим :

$$\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \int \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} \cdot \frac{1}{x}dx =$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \ln x - \frac{1}{n+1}\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \ln x - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} + C =$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + C$$

Ответ: $\int x^n \ln x\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + C$

Пример 3:

Вычислить интеграл $\int x^2 cos dx$

Решение: Положим $u = x^2, dv = \cos x\,dx$. Тогда $du = 2xdx, v = \sin x$.

Используя формулу (1), получим :

$$x^2\sin x - \int \sin x \cdot 2xdx = x^2 \sin x - 2\int x\sin xdx$$

Положим $u = x, dv = \sin x\,dx$. Тогда $du = dx, v = -\cos x$.

$x^2\sin x - 2\int x\sin xdx = x^2\sin x - 2\big(x\cdot(-\cos x) - \cos x\big)dx = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\int \cos x\,dx = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C = (x^2-1)\sin x + 2x\cos x + C.$

Ответ: $\int x^2 cos dx = (x^2-1)\sin x + 2x\cos x + C$

Пример 4:

Вычислить интеграл: $\int x^2\ln^2 x\,dx$

Решение: Положим $u = \ln^2 x\,, du = \frac{2\ln x dx}{x}$. Тогда $dv = x^2dx, v = \int x^2dx = \frac{x^3}{3}$.

$$\int x^2\ln^2 x\,dx = \frac{x^3\ln^2 x}{3} - \int \frac{2x^3\ln x\,dx}{3x} = \frac{1}{3}x^3\ln^2 x - \frac{2}{3}\int x^2\ln x\,dx$$

Положим $u = \ln x\,, dv = x^2dx$. Тогда $du = \frac{dx}{x}, v = \int x^2dx = \frac{x^3}{3}$

$\int x^2\ln^2 x\,dx = \frac{1}{3}x^3\ln^2 x - \frac{2}{3}\int x^2\ln x\,dx = \frac{1}{3}x^3\ln^2 x - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}x^3\ln x - \int\frac{x^3dx}{3x}\right) = \frac{1}{3}x^3\ln^2 x - \frac{2}{9}x^3\ln x + \frac{2}{27}x^3 + C.$

Ответ: $\int x^2\ln^2 x\,dx = \frac{1}{3}x^3\ln^2 x - \frac{2}{9}x^3\ln x + \frac{2}{27}x^3 + C.$

Список литературы:

1. Математический анализ: Интегральное исчисление: Учеб.пособие для студентов-заочников 2 курса физ.-мат. фак. пед. ин-тов/ Н. Я. Виленкин, А. Г. Мордкович, Е. С. Куницкая; Моск. гос. заоч. пед. ин-т. – 2-е изд., перераб. – М.: Просвещение, 1988.- 14с

2. Сборник задач по курсу математического анализа/ Берман Г. Н.; М., 1969г. -125с