

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ В МЕТОДЕ ДВУХ ИЗОБРАЖЕНИЙ В НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Вертинская Н. Д., профессор, д. т. н., [stevia@mail.ru](mailto:stevia@mail.ru)

**В статье рассмотрена возможность моделирования взаимно однозначными соответствиями поверхностей второго порядка на плоскости с применением в качестве аппарата проецирования двух связок прямых.**

**The article considers the possibility of modeling-one correspondence surfaces of the second order in the plane with projection apparatus as two bundles of lines.**

Рассмотрим моделирование поверхности на плоскости, используя различные аппараты проецирования и основные требования моделирования для получения в качестве моделей взаимно однозначных соответствий [1].

Поверхность  $\Phi^2$  второго порядка в методе двух изображений, т. е. когда аппаратом проецирования являются две связки прямых, на плоскости моделируется  $(2\div 2)$ -значным квадратичным соответствием  $T_{2-2}^2$ , устанавливаемым между горизонтальными  $A_1 = \bar{A}_1$  и фронтальными  $A_2 = \bar{A}_2$  проекциями точки  $A \in \Phi^2$ . Здесь дву - двузначное соответствие означает, что  $A_1 = \bar{A}_1 \leftrightarrow A_2 = \bar{A}_2$ , а квадратичное - прямой  $a_1$  горизонтальной проекции ставится в соответствие коника  $a_2^2$  фронтальной плоскости проекций.

Поверхность  $\Sigma^n$  порядка  $n$  в методе двух изображений моделируется  $(n\div n)$ -значным соответствием  $n$ -го порядка, устанавливаемом между полями проекций. Отсутствие законченной теории многозначных соответствий не позволяет по такой модели поверхности исследовать ее свойства. Поэтому возникает актуальная проблема начертательной геометрии и алгебраической геометрии, связанная с получением в качестве модели поверхности взаимно однозначного соответствия [2].

Рассмотрим условия моделирования поверхностей  $\Sigma^n$  порядка  $n$  в методе двух изображений  $(1\div 1)$ -значными соответствиями.

Чтобы поверхность  $\Sigma^n$  порядка  $n \geq 2$  моделировалась на плоскости  $(1\div 1)$ -значным соответствием, необходимо подбирать соответствующий аппарат проецирования. Например, квадрака  $\Phi^2$  моделируется  $(1\div 1)$ -значным соответствием, если центры вспомогательного проецирования инцидентны квадраки (стереографическое проецирование). При этом соответствия, получаемые на плоскости изображения, могут быть инволюционными или не инволюционными, но обязательно центральными.

Поверхности высших порядков  $n > 2$  моделируются  $(1\div 1)$ -значным соответствием, если они имеют не менее двух  $(n-1)$ -кратных точек, в которые помещаются центры

стереографического проецирования. Модели таких поверхностей, получаемые в методе двух изображений, будут центральными и нелинейными. Поверхности  $\Sigma^n$  для  $n > 2$  моделируются  $(1 \div 1)$ -значными соответствиями, если в качестве аппаратов проецирования используются связки прямых, конгруэнции прямых  $K\Gamma(1, k)$  первого порядка и  $k$  класса или специальные комплексы прямых  $Km(n)$ .

Все возможные варианты сочетаний проецирований составляющих аппараты отображения в методе двух изображений сведены в табл. 1 [3].

Таблица 1

N	Первое вспомогательное проецирование	Второе вспомогательное проецирование	Основное проецирование	Примечание
1	Связка ( $S_1$ )	Связка ( $S_2$ )	Связка ( $S$ )	Точки $S_1, S_2, S$ коллинейны
2	Связка ( $S_1$ )	Конгруэнция $K\Gamma(1, k)$	Связка ( $S$ )	Точки $S_1, S_2, S$ инцидентны фокальной прямой
3	Конгруэнция $K\Gamma(1, k)$	Конгруэнция $K\Gamma(1, k)$	Связка ( $S$ )	Фокальные прямые конгруэнций совпадают, точка $S$ им инцидентна

Поверхность  $\Phi^2$  второго порядка в методе двух изображений, т. е. когда аппаратом проецирования являются две связки прямых, на плоскости моделируется  $(2 \div 2)$ -значным

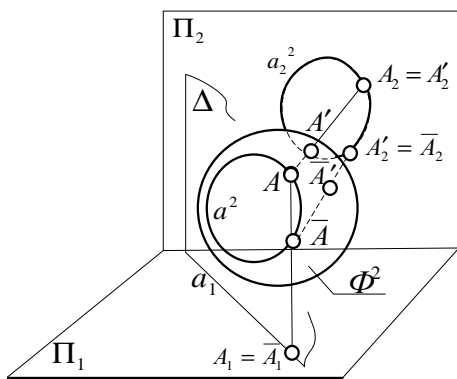


Рис. 1

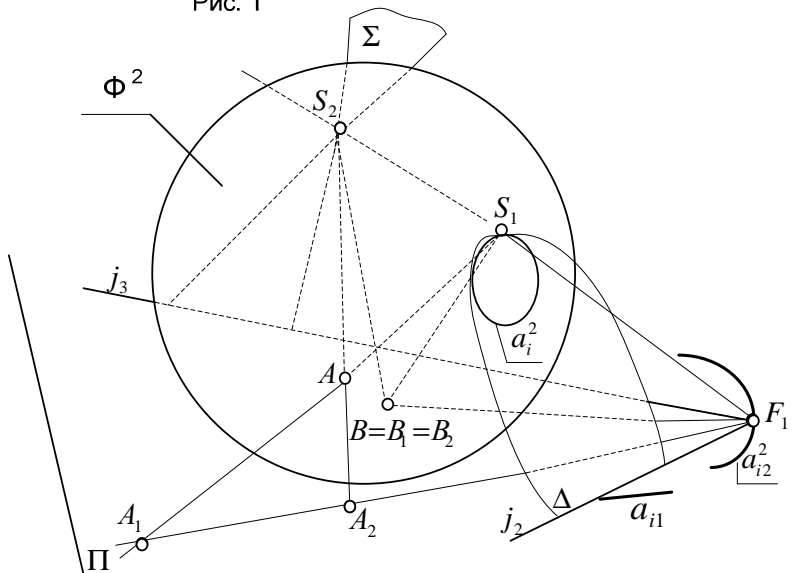


Рис. 2

квадратичным соответствием  $T_{2-2}^2$ , устанавливаемым между горизонтальными  $A_1 = \bar{A}_1$  и фронтальными  $A_2 = \bar{A}_2$  проекциями точки  $A \in \Phi^2$  (рис. 1). Здесь дву-значное соответствие означает, что  $A_1 = \bar{A}_1 \leftrightarrow A_2 = \bar{A}_2$ , а квадратичное - прямой  $a_1$  горизонтальной проекции ставится в соответствие

коника  $a_2^2$  фронтальной плоскости проекций.  $A_1 \sim A_2$ ,  $\Phi^2 \cap \Delta = a^2$ ,  $\Delta \cap \Pi = a_1 \rightarrow a_2^2$ .

Далее рассмотрим моделирование сферы  $\Phi^2$  при помощи стереографического проецирования из центров  $S_1$  и  $S_2$ , причем  $\{S_1, S_2\} \in \Phi^2$ , на плоскость проекций  $\Pi$ . При

этом каждая точка  $A \in \Phi^2$ , за небольшим исключением, будет моделироваться парой соответственных точек  $A_1 \sim A_2$  инцидентных прямой  $(F_1 A_1)$ , (рис. 2) где  $F_1 = (S_1 S_2) \cap \Pi$ . Исключение составляют точки  $S_1$  и  $S_2$ . При перемещении точки  $A$  по сфере  $\Phi^2$ , когда точка  $\bar{A} = S_1$  из центра  $S_1$  будет проецироваться на плоскость  $\Pi$  множеством прямых, образующих касательную плоскость  $\Delta(S_1, j_2)$  к сфере  $\Phi^2$  в точке  $S_1$ , то есть точка  $\bar{A} = S_1$  проецируется на плоскость  $\Pi$  из точки  $S_1$  прямой  $j_2$ . Из центра  $S_2$  точка  $\bar{A} = S_1$  проецируется в точку  $F_1 = (S_1 S_2) \cap \Pi = \bar{A}_2$ , значит моделью точки  $\bar{A} = S_1$  на плоскости  $\Pi$  будет прямая  $j_2$  и точка  $F_1$ , аналогично - моделью точки  $A' = S_2$  из центра  $S_2$  на плоскость  $\Pi$  будет прямая  $j_3 = \Sigma(S_2, j_3) \cap \Pi$ , а из центра  $S_1$  точка  $F_1 = (S_1 S_2) \cap \Pi = A'_1$ . Нарушение взаимно однозначного соответствия при стереографическом проецировании сферы  $\Phi^2$  на плоскости  $\Pi$  получается при проецировании точек  $\bar{A} = S_1$  и  $A' = S_2$  из центров проецирования  $S_1$  и  $S_2$  соответственно при этом прямые  $j_2$  и  $j_3$ , будут исключенными (фундаментальными) прямыми этого отображения.

Прямая  $(S_1 S_2)$  является двойной прямой пространства, так как она проецирует две точки  $S_1$  и  $S_2$ , а точка  $F_1$ , двойной точкой плоскости  $\Pi$ . В рассматриваемом случае, сфера  $\Phi^2$  касается плоскости  $\Pi$  в точке  $B$ , которая из центров проецирования  $S_1$  и  $S_2$  проецируется на плоскость  $\Pi$  в точки  $B_1$  и  $B_2$ . Они совпадают с точкой  $B$ , то есть  $B = B_1 = B_2$ , полученная точка  $B = B_1 = B_2$  то же двойная точка плоскости  $\Pi$ . Если бы сфера  $\Phi^2$  пересекала плоскость  $\Pi$ , то на плоскости  $\Pi$  была бы целая окружность двойных точек, такая окружность называется инвариантной кривой линии преобразования, а точка  $F_1$  инвариантная точка преобразования или модели сферы  $\Phi^2$  на плоскость  $\Pi$ .

Все окружности связки  $(S_1)$  окружностей сферы  $\Phi^2$  проецируются из центра  $S_1$  на плоскость  $\Pi$  в прямые, так как связка  $(S_1)$  плоскостей, несущая связку  $(S_1)$  окружностей сферы  $\Phi^2$ , пересекает плоскость  $\Pi$  по прямым  $a_{1i}$ . Значит двухпараметрическое множество окружностей связки  $(S_1)$  окружностей сферы проецируется на плоскость  $\Pi$  в двухпараметрическое множество прямых. Связка  $(S_1)$  окружностей сферы  $\Phi^2$  из центра  $S_2$  проецируется на плоскость  $\Pi$  связкой  $(F_1)$  окружностей  $a_{2i}^2$ , так как все конические поверхности  $\Omega^2(S_2, a_i^2)$ , проецирующие окружности  $a_i^2$  инцидентны прямолинейной образующей  $(S_1 S_2)$ , где  $a_{2i}^2 = \Omega^2(S_2, a_i^2) \cap \Pi$ . Любая окружность  $\bar{a}_i^2$  сферы  $\Phi^2$  не инцидентна центрам  $S_1$  и  $S_2$  будет моделироваться на плоскость  $\Pi$  парой окружностей

$a_{1i}^2$  и  $a_{2i}^2$ , получаемых как результат пересечения конических поверхностей  $\Delta^2(S_1, \bar{a}_i^2)$  и  $\bar{\Delta}^2(S_2, \bar{a}_i^2)$  с плоскостью  $\Pi$ . Пучок окружностей  $(S_1, S_2)$  сферы  $\Phi^2$  будет моделироваться на плоскости  $\Pi$  прямыми пучка  $(F_1)$  прямых, получаемых в пересечении пучка  $(S_1, S_2)$  плоскостей, несущих пучок  $(S_1, S_2)$  окружностей сферы  $\Phi^2$ , с плоскостью  $\Pi$ .

При моделировании поверхности на плоскости или на другой поверхности необходимо, чтобы существовала взаимосвязь оригинала (поверхности  $\Phi^2$ ), аппарата проецирования (двух связок  $(S_1)$  и  $(S_2)$  прямых) и модели. В рассмотренном примере эта связь организована в расслоении поверхности  $\Phi^2$  в пучке  $(S_1, S_2)$  плоскостей. Соответствия порождаемые на лучах пучка  $(F_1)$  прямых, в общем случае, будут параболического, гиперболического или эллиптического типов. В нашем примере только на луче  $(F_1B)$  будет параболическое соответствие между проекциями точек  $B_1 \sim B_2$ , на остальных лучах пучка  $(F_1)$  прямых будут эллиптические соответствия. Моделью сферы  $\Phi^2$  на плоскость  $\Pi$  будет инволюция, однозначно определяемая центром  $F_1 = (S_1 S_2) \cap \Pi$  и инвариантной окружностью  $d^2 = \Phi^2 \cap \Pi$ , если точка  $F_1 = O$ , где  $O$  - центр инвариантной окружности в остальных случаях моделью сферы  $\Phi^2$  на плоскости проекций  $\Pi$  будет взаимно однозначное квадратичное соответствие  $T_2$ , так как, если на плоскости  $\Pi$  взять точку  $A_1$ , отнесенной к первичной проекции точки  $A \in \Phi^2$  и пусть точка  $A$  перемещается по прямой  $a_1$ , которая из центра  $S_1$  будет проецироваться плоскостью  $\Delta(S_1, a_1)$ , пересекающей сферу  $\Phi^2$  по окружности  $a^2$ , которая из центра  $S_2$  проецируется конической поверхностью  $\bar{\Delta}^2(S_2, a^2)$ , пересекающей плоскость проекции  $\Pi$  по окружности  $a_2^2$  соответствующей прямой  $a_1$  в соответствии  $T_2$ . Значит, точка  $A_2 \sim A_1$  будет перемещаться по окружности  $a_2^2$ . Соответствие  $T_2$  будет инволюционным, если плоскость проекций  $\Pi$  будет биссекторной плоскостью двугранного угла, образованного касательными плоскостями  $\Sigma_i$  и  $\bar{\Sigma}_i$  к сфере в точках  $S_{1i}$  и  $S_{2i}$ , которое обозначается  $\mathfrak{S}_2$ .

На рассмотренных выше примерах четко прослеживается тесная связь типа модели оригинала от взаимного положения аппарата проецирования относительно оригинала и плоскости проекции, а так же расположения плоскости проекций относительно оригинала. Наиболее простые модели оригиналов являются инволюционными соответствиями.

Далее, в качестве примера, рассмотрим моделирование эллипсоида вращения  $\Sigma^2$  при помощи стереографического проецирования из центров  $S_1$  и  $S_2$ , инцидентных поверхности

эллипсоида вращения  $\Sigma^2$ , на плоскости проекций  $\Pi$  совмещенной с его плоскостью симметрии перпендикулярно прямой  $(S_1 S_2)$ . Рассмотрим аналитическое моделирование эллипсоида вращения, заданного каноническим уравнением:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{81} = 1 \quad (1)$$

центр, которого помещен в начало координат. Поэтому уравнение инвариантной окружности  $d^2 = \Sigma^2 \cap \Pi$ , получается подстановкой в (1) значения  $z=0$ :

$$x^2 + y^2 = 9 \quad (2)$$

Центры проецирования (вершины эллипсоида) имеют координаты  $S_1(0,0,9), S_2(0,0,-9)$ . В этом случае центром преобразования является точка  $F_1(0,0,0) = (S_1 S_2) \cap \Pi$ .

Покажем, что моделью эллипсоида вращения  $\Sigma^2$  является инволюционное квадратичное соответствие - инверсия. Возьмем на эллипсоиде  $\Sigma^2$  некоторую точку  $A(2,1,6)$  и запишем уравнение прямой  $(S_1 A)$ :

$$\begin{cases} x = 2y \\ y = \frac{z-9}{3} \end{cases} \quad (3)$$

Найдем точку  $A(-6,-3)$  пересечение прямой  $(S_1 A)$  с плоскостью  $\Pi$ , подставив в (3) значение  $z = 0$ . Аналогичными выкладками найдем координаты точки  $A_2(-\frac{6}{5}; -\frac{3}{5})$  проекции точки  $A$  из центра  $S_2$ . Точки  $A_1$  и  $A_2$  соответственны в полученном преобразовании и коллинейны с центром преобразования  $F_1$ . Прямая  $(F_1 A_1)$  пересекает инвариантную окружность  $d^2$  в двойных точках  $D, \bar{D}$ , которые с точками  $A_1, A_2$  составляют гармоническую четверку точек, то есть  $(D, \bar{D}, A_1, A_2) = -1$ , что в координатной форме запишется так:

$$\frac{(x - x_1)(x^3 - x_2)}{(x - x_2)(x^3 - x_1)} = -1, \quad (4)$$

где  $A_1(x', y')$ ;  $A_2(x, y)$ ;  $D(x_1, y_1)$ ;  $\bar{D}(x_2, y_2)$ . Координаты точек  $D$  и  $\bar{D}$  находим, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = kx, \end{cases} \quad (5)$$

где  $x^2 + y^2 = 9$  - уравнение инвариантной окружности  $d^2$ ,  $y = kx$  - уравнение прямой  $(F_0 A_1)$ .

Имеет координаты точек:

$$D\left(\frac{-3}{\sqrt{1+k^2}}; \frac{-3k}{\sqrt{1+k^2}}\right) \bar{D}\left(\frac{3}{\sqrt{1+k^2}}; \frac{3k}{\sqrt{1+k^2}}\right).$$

Подставляя координаты точек  $A_1, A_2, D, \bar{D}$ , в (5) и выполняя упрощения, получим формулы прямого преобразования:

$$\begin{cases} x' = x \frac{9}{x^2 + y^2}, \\ y' = y \frac{9}{x^2 + y^2}. \end{cases} \quad (6)$$

Таким образом, мы имеем на плоскости  $\Pi$  квадратичное, инволюционное преобразование - инверсию.

Если точка  $A_1(-6, -3)$  будет перемещаться по прямой  $a_1$ :

$$3y - 2x - 3 = 0, \quad (7)$$

то, решая совместно (7) и (6), получим уравнение окружности на которой лежит точка  $A_2(-\frac{6}{5}; -\frac{3}{5})$ , соответственная точке  $A_1$ . Этот результат говорит о том, что любая коника эллипсоида вращения  $\Sigma^2$ , инцидентная центру  $S_1$  (или  $S_2$ ), проецируется на плоскость  $\Pi$  в окружность.

Как было отмечено раньше, чертеж модулируемой поверхности должен быть обратимым. Это значит, что по одной проекции, например,  $A_1$  точки  $A$  поверхности можно построить вторую проекцию  $A_2$ . На полученной модели эллипсоида вращения  $\Sigma^2$  это возможно, так как имея проекцию  $A_1$ , строим ей инверсную точку  $A_2$  относительно инвариантной окружности  $d^2$ .

### Вывод:

Таким образом, имея модель поверхности  $\Sigma^2$ , можно решать любые позиционные задачи. Например, пусть требуется построить точки пересечения поверхности эллипсоида вращения

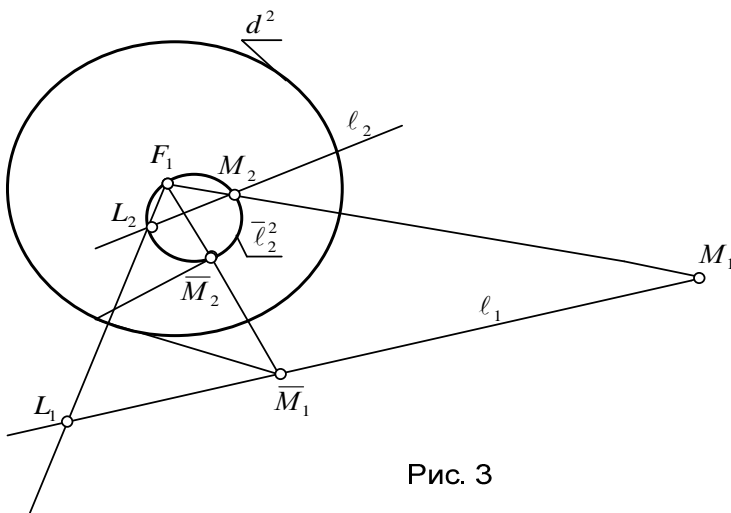


Рис. 3

$\Sigma^2$  с прямой  $\ell$ . На плоскости  $\Pi$  эллипсоид  $\Sigma^2$  моделируется (задается) инверсией  $\mathfrak{S}_2(F_0, d^2)$ , а прямая  $\ell$  задается свободными проекциями  $\ell_1, \ell_2$  (рис. 3). Отнесем прямую  $\ell_1$  к полю  $\Pi_1$  и построим ее образ  $\bar{\ell}_2$  в инверсии  $\mathfrak{S}_2$ . Точки

пересечения окружности  $\bar{\ell}_2^2$  с прямой  $\ell_2$  суть вторичные проекции  $L_2, M_2$  точек пересечения прямой  $\ell$  с эллипсоидом вращения  $\Sigma^2$ . Затем строим первичные проекции  $L_1, M_1$  точек пересечения, как образов точек  $L_2, M_2$  в инверсии  $\mathfrak{S}_2$ . Здесь инверсия  $\mathfrak{S}_2(F_0, d)$  является моделью для множества эллипсоидов вращения, имеющих уравнения вида:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (15)$$

где  $c$  - любое положительное число.

#### Литература:

1. Sturm R. Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Linien geometrie... Belandlung, Teil, 1, Leipzig, 1892. p. 366.
2. Вертинская Н. Д. Задачи геометрического моделирования технологических процессов. Научно – методическое пособие. М. 2015. – с.131.
3. Иванов Г. С. К вопросу моделирования алгебраических поверхностей нормальными криволинейными инволюциями. Кн. Научные труды МЛТИ, М.: № 54, 1973. – с. 120.