где: $C_k^\nu = \dfrac{k!}{\nu!(k-\nu)!}$ -биноминальные коэффициенты,

характеризуют локальные свойства решетчатой функции, т.е. её поведение вблизи некоторой точки. Общие (интегральные) свойства решетчатой функции могут быть охарактеризованы при помощи конечной суммы. В общем случае конечной суммой решетчатой функции $f[n,\varepsilon]$ называется решетчатая функция, определяемая равенством:

$$f_\Sigma[n,\varepsilon] = \sum_{m=0}^{n-1} f[m,\varepsilon] = \sum_{m=1}^{n} f[n-m,\varepsilon]. \tag{8}$$

Как видно, сумма (7) играет по отношению к решетчатой функции ту же роль, что и интеграл в непрерывном анализе. При фиксированных значениях n и ε значение функции (8) вычисляется совершенно элементарно. Однако получение аналитического выражения f_Σ, как функции n и ε, в явном виде возможно лишь для простейших функций $f[n,\varepsilon]$.

Операции взятия конечной разности и образования конечной суммы являются линейными и для них справедлив принцип суперпозиции (наложения).

Соотношение, связывающее некоторую искомую решетчатую функцию $y[n,\varepsilon]$ и её разности различных порядков, называется разностным уравнением. Простейшей иллюстрацией разностных уравнений могут служить известные соотношения между членами арифметической или геометрической прогрессии. К разностным уравнениям приводятся различные задачи, в частности из теории интерполяции. Большую роль разностные уравнения играют и в технике. Они появляются при исследовании

[1]См. с. 1–9–44 в //econf.rae.ru/article/9654 и др.

физических явлений, сопровождающихся дискретным или скачкообразным изменением (в пространстве или времени) части переменных.

Характерным примером может служить рассматриваемая эквивалентная схема с периодической коммутацией параметров, где такой переменной является время.

Большую роль разностные уравнения играют в цифровых вычислительных устройствах, где они представляют собой последовательность действий вычислительного устройства и обычно называются программой. Здесь дискретный характер имеет выходная величина цифровой машины, которая изменяется скачкообразно через промежутки времени, необходимые для обработки в машине входной информации.

В общем случае <u>линейное</u> разностное уравнение (ЛРУ) с постоянными коэффициентами записывается в виде:

$$b_l \Delta^l y[n,\varepsilon] + b_{l-1} \Delta^{l-1} y[n,\varepsilon] + \dots + b_0 y[n,\varepsilon] = f[n] \tag{9}$$

Здесь: $y[n,\varepsilon]$ - представляет решение разностного уравнения.

$f[n]$ - некоторая заданная, известная решетчатая функция.

l - порядок наивысшей разности, определяющий порядок разностного уравнения.

Уравнение (9) называют неоднородным, а при $f[n] \equiv 0$ говорят об однородном линейном разностном уравнении l-го порядка.

Часто оказывается более удобной иная форма записи этого уравнения, получающаяся из выражения (9) путём замены разностей их значениями (7).

$$a_l y[n+l,\varepsilon] + a_{l-1} y[n+l-1,\varepsilon] + \dots + a_0 y[n,\varepsilon] = f[n]. \tag{10}$$

Уравнения (9) и (10) имеют в общем случае бесчисленное множество решений.

Классический способ решения разностных уравнений*) во многом аналогичен классическому методу решения дифференциальных уравнений. Для выделения единственной решетчатой функции, удовлетворяющей разностному уравнению, предполагаются заданными начальные (в общем случае граничные) условия в виде значений искомой решетчатой функции $y[n,\varepsilon]$ в l точках, соответствующих, например, значениям аргумента $n = 0, 1, \dots, (l-1)$, т.е. следует задать значения:

$$y[0,\varepsilon] = y_0;\ y[1,\varepsilon] = y_1;\ \dots;\ y[l-1,\varepsilon] = y_{l-1}. \tag{11}$$

Специальными приёмами и при помощи метода вариации произвольных постоянных разыскиваются частное решение $\bar{y}[n,\varepsilon]$ выражения (10), некоторые, новые произвольные постоянные C_i из системы $l-1$ алгебраических уравнений и корни z_i характеристического уравнения

$$a_0 z^l + a_1 z^{l-1} + \dots + a_l = 0.$$

Затем определяется искомая решетчатая функция по выражению:

$$y[n,\varepsilon] = C_1 z_1^n + C_2 z_2^n + \dots + C_l z_l^n + \bar{y}[n,\varepsilon]. \tag{12}$$

---

*) излагается в различного рода учебниках, руководствах по исчислению конечных разностей, см.например [Л2,3,4].

Всё это связано с определённой сложностью и трудностями. Именно необходимость решения системы уравнений вместе с трудностями нахождения частного решения является недостатками классического метода. От этих недостатков в известной мере свободны операционные методы решения разностных уравнений, основанные на переходе от решетчатых функций к их изображениям. Эти методы построены на базе различных преобразований: дискретное преобразование Лапласа ($\mathcal{D}$ -преобразование)[Л1,8] ; Z - преобразование (преобразование, осуществляемое рядом Лорана)[Л 5,6]; S -преобразование (частный случай преобразования Дирикле); w - преобразование (дробно-линейное преобразование) [Л7,8]и т.п.

Принципиальных отличий между этими преобразованиями нет.

Выбор типа преобразования определяется удобством его использования при решении тех или иных задач. Все они основаны на принципе нахождения изображений по известным оригиналам и обратно.

Выражения для изображений, например, в Z -преобразовании выглядят несколько проще, чем в $\mathcal{D}$ -преобразовании и сами изображения не многозначны, а однозначны. Однако $\mathcal{D}$ -преобразование оказывается более удобным в тех случаях, когда необходимо проводить аналогию между непрерывными и решетчатыми функциями, т.е. непрерывными процессами (непрерывными устройствами) и процессами с квантованием по времени (линейными импульсными устройствами).

Применительно к задачам исследований импульсных процессов аппарат $\mathcal{D}$ -преобразования нашёл широкое применение благодаря присущей ему близости к привычным уже методам исследования непрерывных систем. Кроме того, $\mathcal{D}$ - преобразование позволяет единообразным путём произвести анализ и синтез импульсных систем как аналитическими, так и частотными методами. Кстати, в основной части данной работы именно аналитическими методами с использованием дискретного преобразования Лапласа и проведён анализ переходных и установившихся процессов устройства типа "источник питания-накопитель-нагрузка".

Продолжение следует.