Приложение 2

Некоторые сведения из теории решетчатых функций

Для простейшего случая импульсной работы - получения последовательности прямоугольных импульсов постоянной частоты и длительности - рассматриваемая импульсная цепь реагирует на мгновенное значение воздействия, приложенного ко входу импульсного элемента, только в равноотстоящие друг от друга дискретные моменты времени. Поэтому математическим аппаратом, адекватным задаче работы импульсных элементов, является аппарат, позволяющий исследовать основные черты и особенности числовых последовательностей (функций дискретного аргумента).

Пусть задана некоторая непрерывная функция времени $f(t)$, определённая для всех значений t и тождественно равная нулю для $t<0$. Пусть n - натуральное число ($n=0,1,2,3,\ldots$) и T - некоторое постоянное положительное число, определяющее отрезок между соседними дискретными значениями независимой переменной и имеющее размерность времени, называемое периодом или интервалом дискретности.

Функцией дискретного аргумента называется числовая последовательность:

$$f(0),\ f(T),\ f(2T),\ \ldots\ldots,\ f(nT), \qquad (1)$$

получающаяся в результате выборки значений функции $f(t)$ в точках $t=nT$ оси времени. Функцию дискретного аргумента, т.е. функцию, значения которой определяются только при дискретных равноотстоящих друг от друга значениях независимой переменной, называют решетчатой функцией и обозначают символом $f[nT]$. Ординаты этой функции называют дискретами.

[1]См. с. 1–40 в //econf.rae.ru/article/9654 и др.

$$f[nT] = f(t)\big|_{t=nT}. \qquad (2)$$

При известном интервале дискретности T по функции $f(t)$ решетчатая функция определяется однозначно. Обратное положение несправедливо: очевидно, что одной и той же решетчатой функции могут соответствовать различные непрерывные или разрывные функции, если их значения в моменты времени $t = nT$ равны дискретам решетчатой функции. Эти функции называют <u>огибающими</u> решетчатой функции. Одной из огибающих будет функция, кратчайшим путём соединяющая дискреты при T, условно стремящемуся к бесконечно малой величине.

Если положить $t = nT + \Delta t$, где Δt - фиксированный или непрерывно изменяющийся параметр, лежащий в пределах от 0 до T (или от $-T$ до 0), получим числовую последовательность вида:

$$f(\Delta t), f(T+\Delta t), f(2T+\Delta t), \ldots\ldots, f(nT+\Delta t), \qquad (3)$$

образованную в результате выборки значений функции $f(t)$ в точках $t = nT + \Delta t$ оси времени.

При этом, аргументы решетчатой функции $f[nT, \Delta t]$ смещены по отношению к аргументам решетчатой функции, соответствующей $\Delta t = 0$, т.е. по отношению к $f[nT]$. Числовая последовательность (3) называется <u>смещённой</u> решетчатой функцией, представляющую функцию смещённого дискретного аргумента.

При фиксированном значении параметра Δt смещённая решетчатая функция также полностью не отражает свойства непрерывной функции $f(t)$. При непрерывном Δt функция $f[nT, \Delta t]$ становится тождественной $f(t)$.

Таким образом, смещённую решетчатую функцию с непрерывно изменяющимся параметром Δt можно рассматривать как иную форму записи непрерывной функции.

Для исследования устройств со скачкообразно изменяющимися параметрами часто оказывается более удобным пользоваться относительными величинами. В частности, для решетчатых функций вводят предварительно новую зависимую переменную $\bar{t} = \frac{t}{T}$ так что $f(t) = f(\bar{t}T)$, которую ради простоты обозначим через $f(\bar{t})$. Соответствующая решетчатая функция, совпадающая с $f(\bar{t})$ при значениях новой независимой переменной $\bar{t} = n$, будет равна $f[n]$. В этом случае расстояние между дискретами равно единице; а решетчатая функция $f[n]$ определена при целочисленных значениях независимого переменного.

Смещённая решетчатая функция в этом случае записывается в виде:

$$f[n, \varepsilon] = f[n + \varepsilon], \tag{4}$$

где: $\varepsilon = \dfrac{\Delta t}{T}$ – относительное изменение Δt

в интервале:

$$0 \leq \varepsilon \leq 1. \tag{5}$$

Параметр ε рассматривается в качестве относительного (безразмерного) времени, отсчитываемого от начала очередного (n-го) интервала. Его иногда называют <u>локальным</u> (местным) <u>временем</u>.

С принципиальной точки зрения между решетчатой функцией и смещённой решетчатой функцией нет никакой разницы: и та и другая функции представляют собой некоторые числовые последовательности. Решетчатая функция является частным случаем смещённой решетчатой функции при $\varepsilon = 0$. Если последовательность (4) известна для всех значений ε из интервала (5), смещённая решетчатая функция $f[n,\varepsilon]$ позволяет однозначно восстановить функцию непрерывного аргумента $f(t)$. Это обстоятельство широко используется при расчётах устройств со скачкообразным изменением параметров.

Особенностью решетчатых функций является то, что их значения (дискреты) известны только для дискретных значений аргумента.

В связи с этим для изучения поведения таких функций методы дифференциального и интегрального исчисления оказываются непригодными, что и обусловливает определенные затруднения при анализе импульсных систем.

Решетчатые функции являются предметом изучения теории конечных разностей [Л2,3,4], во многом напоминающей непрерывный анализ, где, в некотором роде, дискретными аналогами*) производных и интегралов непрерывных функций для решетчатых функций являются конечные разности и суммы. Так, например, скорость изменения решетчатой функции характеризуется её <u>первой разностью</u>, которая является аналогом первой производной обычной функции

$$\Delta f[n,\varepsilon] = f[n+1,\varepsilon] - f[n,\varepsilon]. \tag{6}$$

Конечные разности различных порядков

$$\Delta^{(k)} f[n,\varepsilon] = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{\nu} C_k^{\nu} f[n+k+\nu,\varepsilon], \tag{7}$$

---

*) аналогия между производными и интегралами непрерывного аргумента и конечными разностями и суммами решетчатых функций является чисто формальной. Достаточно указать, что суммы и разности решетчатых функций существуют всегда; тогда как, для дифференцируемости и интегрируемости функций непрерывного аргумента требуется соблюдение определенных условий. В связи с этим распространение свойств производных и интегралов на конечные разности и суммы возможно далеко не всегда.