Некоторые топологические свойства лексикографически упорядоченного квадрата

Миронова Ю. Н.

Казанский (Приволжский) Федеральный Университет,
Елабужский институт
г.Елабуга, Россия.

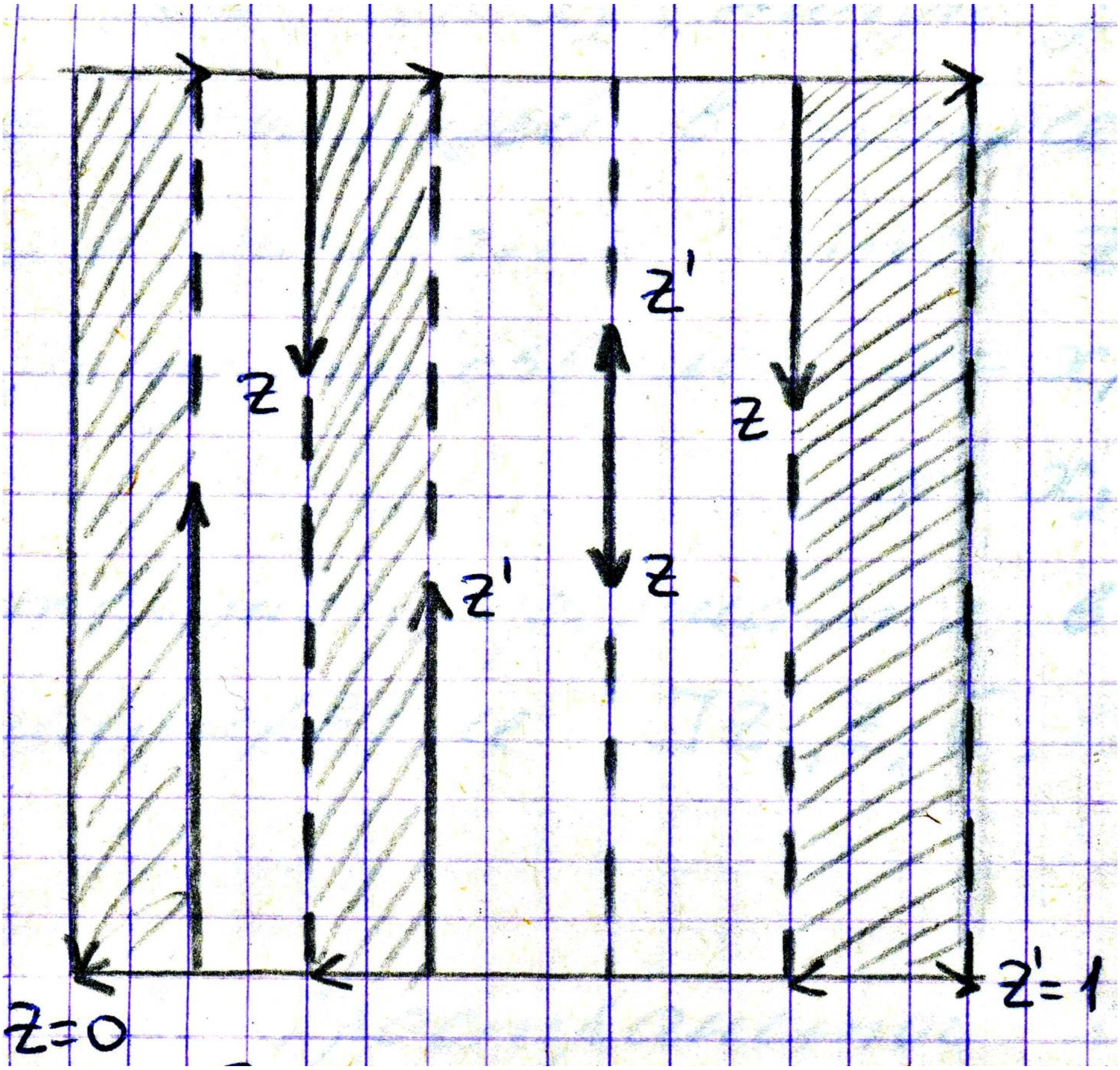

Рис.1. Лексикографически упорядоченный квадрат.

При изучении общей топологии возникает необходимость рассматривать некоторые простые примеры топологических пространств, обладающие определенными свойствами.

Наряду с такими топологическими пространствами, как стрелка, две стрелки, ковер Серпинского, можно рассмотреть топологическое пространство – лексикографически упорядоченный квадрат (см. рис. 1).

1. Описание пространства.

Напомним определение нашего пространства.

Рассмотрим на плоскости OXY замкнутый квадрат со сторонами, параллельными осям координат и вершинами $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$ и упорядочим множество всех точек $z = (x, y)$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ этого квадрата в лексикографическом порядке, то есть:

$(x, y) < (x', y')$, если $x < x'$ или

если $x = x'$ и $y < y'$.

Полученные в результате такого упорядочения порядковые интервалы и полуинтервалы $[0, \alpha[$ и $]\beta, 1]$ образуют базу нашего пространства Q.

Эти интервалы имеют следующий вид: пусть даны $z_1 < z_2$, $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$, причем $x_1 < x_2$, тогда для любой точки z, лежащей в полосе $0 \leq y \leq 1$, $x_1 < x < x_2$, мы получим, что $z_1 < z < z_2$.

Полуинтервалы $x = x_1$, $y_1 < y \leq 1$ и $x = x_2$, $0 \leq y \leq y_2$ также содержатся в порядковом интервале $]z_1, z_2[$, если $y_1 \neq 1$, $y_2 \neq 0$.

2. Пространство является линейно упорядоченным и содержит наибольший и наименьший элемент.

Напомним, что

Определение 1. Множество X называется частично упорядоченным, если в нём установлено отношение порядка, удовлетворяющее условию транзитивности: если $x < x'$ и $x' < x''$, то $x < x''$.

Определение 2. Если в данном частично упорядоченном множестве X отношение порядка установлено для любых двух различных элементов, то частично упрядоченное множество называется линейно упорядоченным

Теорема 1. Лексикографически упорядоченный квадрат Q является линейно упорядоченным множеством.

Определение 3. Если в данном упорядоченном множестве $a < x < b$, то говорят, что элемент x лежит между элементами a и b. Множество всех элементов x, лежащих между элементами a и b, называется интервалом $]a, b[$ упорядоченного множества X.

Обозначим в пространстве Q точку (0,0) символом $\mathbf{0}$, точку (1,1) - символом $\mathbf{1}$, а любой элемент $(x_1, x_2) \in Q$ - символом x, тогда открытыми множествами в Q являются $]x, y[$, $[0, x)$, $(x, 1]$, где $\mathbf{0} \leq x \leq \mathbf{1}$, $\mathbf{0} \leq y \leq \mathbf{1}$ и всевозможные их пересечения.

Определение 4. Если элемент a частично упорядоченного множества X таков, что $a \leq x \;\; \forall x \in X$, то a - первый (наименьший) элемент множества X.

Аналогичное определение даётся для наибольшего элемента.

В пространстве Q наименьшим элементом является $\mathbf{0}$, а наибольшим – $\mathbf{1}$.

То есть в пространстве Q имеются наименьший и наибольший элементы.

3. База топологии пространства Q.

Интервалы и полуинтервалы $[\mathbf{0}, \propto [$ и $] \beta, \mathbf{1}]$образуют базу некоторой топологии на Q.

Имеется следующая теорема:

Теорема. Пусть X – множество, B - система его подмножеств. B является базой некоторой топологии на X, если выполняются условия:

a. $\bigcup B = X$ (система B является покрытием X);

b. $\forall x \in X$ и $\forall U, V \in B$: $x \in U \cap V \;\; \exists W \in B$: $x \in W \subset U \cap V$.

Условия a и b этой теоремы выполняются для наших интервалов и полуинтервалов. Следовательно, множество всех порядковых интервалов образуют базу некоторой топологии на Q.

4. Существование системы мощности c попарно не пересекающихся интервалов. Несепарабельность.

Рассмотрим интервалы вида $I_x = \{z = (x, y) | 0 < y < 1\}, 0 \leq x \leq 1$. Это вертикальные интервалы. Здесь x пробегает множество всех действительных чисел на [0,1], то есть множество мощности c. Для любых $x_1 \neq x_2$ имеем $I_{x_1} \cap I_{x_2} = \emptyset$. Интервалы являются открытыми множествами в Q.

То есть доказано существование системы не пересекающихся открытых множеств мощности c.

Докажем теперь несепарабельность Q. Напомним, что

Определение 5. $A \subset X$ ⍰ – всюду плотное множество, если $[A] = X$.

Определение 6. X – сепарабельно, если в X существует счетное всюду плотное множество.

Рассмотрим произвольное всюду плотное множество $A \subset Q$. В любом из наших интервалов I_x имеется по крайней мере одна из точек множества A. Следовательно, мощность множества A не менее, чем континуум.

Следовательно, пространство Q несепарабельно.

5. Хаусдорфовость.

Определение 7. Хаусдорфовым топологическим пространством называется множество, в котором выделены некоторые подмножества, называемые открытыми множествами пространства, так что при этом выполняются следующие условия:

1^0. Всё пространство и пустое множество открыты.

2^0. Сумма любого числа и пересечение конечного числа открытых множеств есть открытое множество.

3^0. Ко всяким двум различным точкам x и y пространства имеются два непересекающихся множества Ox и Oy, содержащих соответственно эти точки.

Докажем хаусдорфовость нашего пространства Q.

Свойства 1^0 и 2^0 следуют из того, что Q - топологическое пространство.

Докажем свойство 3^0.

Пусть даны точки $z_1(x_1, y_1)$, $z_2(x_2, y_2)$, $z_1 \neq z_2$. Тогда $x_1 < x_2$ или $x_1 = x_2, y_1 < y_2$.

A) Пусть $x_1 < x_2$, тогда существует x такой, что $x_1 < x < x_2$, например, $x = \frac{x_1+x_2}{2}$, тогда $Oz_1 = [\mathbf{0}, z)$, $Oz_2 = (z, \mathbf{1}]$, где $z = (\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{1}{2})$.

Множества Oz_1, Oz_2 открыты, $Oz_1 \cap Oz_2 = \emptyset$, $z_1 \epsilon Oz_1$, $z_2 \epsilon Oz_2$.

B) Пусть $x_1 = x_2$, тогда $y_1 < y_2$, следовательно, $z = (x_1, \frac{y_1+y_2}{2})$, и мы снова получаем $Oz_1 = [\mathbf{0}, z)$, $Oz_2 = (z, \mathbf{1}]$.

Таким образом, пространство Q – хаусдорфово пространство.

Эти и другие свойства пространства Q можно изучать на семинарах по общей топологии в университетах.

Литература.

1. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М., «Наука». 1977.
2. Пасынков Б.А. О распространении на отображения некоторых понятий и утверждений, касающихся пространств // Отображения и функторы. М.: Изд-во МГУ, 1984.
3. Миронова Ю.Н. О τ-псевдокомпактных отображениях // Сибирский математический журнал. Май-июнь 2001. Том 42, №3, с. 634-644.
4. Миронова Ю.Н. О псевдокомпактных, счетно компактных, локально бикомпактных отображениях и k-отображениях // Сибирский математический журнал. Том 43, №5. Новосибирск, 2002, с. 1115-1129.

5. Миронова Ю.Н. Псевдокомпактность и счетная компактность непрерывных отображений. Монография. М., ИЦ ГОУ МГТУ «СТАНКИН», 2006. – 76 с.
6. Миронова Ю.Н. Пример курсовой работы по общей топологии // Метрическая геометрия поверхностей и многогранников: Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения Н.В. Ефимова, Москва; 18-21 августа 2010 г.: Сборник тезисов. М.: МАКС Пресс, 2010, с. 105.
7. Миронова Ю.Н. Топологические свойства лексикографически упорядоченного квадрата. // Физико-математическое образование: проблемы и перспективы. Материалы научно-методической конференции, посвященной 60-летнему юбилею физико-математического факультета. – Елабуга: Изд-во ЕИ КФУ, 2013. – с. 113 – 115.
8. Миронова Ю.Н. Свойства лексикографически упорядоченного квадрата. // Научный электронный архив. (27.02.2014, 3 стр.)
URL: http://econf.rae.ru/article/8270 (дата обращения: 27.02.2014).
9. Mironova Yu.N. τ-pseudocompact mappings. // Siberian Mathematical Journal. 2001. Т. 42. № 3. С. 537-545.
10. Mironova Yu.N. On pseudocompact, countably compact locally bicompact mappings, and k-mappings. // Siberian Mathematical Journal. 2002. Т. 43. № 5. С. 899-909.