Выделение и уточнение смысловых единиц геометрии треугольника на примере задания №18 ЕГЭ-2015

Эрдниев Б.П., доктор педагогических наук, профессор, зав.лаб. «УДЕ в непрерывном математическом образовании» КалмГУ
Горяев В.М., кандидат педагогических наук, доцент, зав.каф.ИТ КалмГУ
Эрдниев А.Б., зав.отделом общего образования МО Республики Калмыкия

На олимпиаде «Куб» учителей математики Калмыкии, состоявшейся 22 августа 2015 года, предлагались задачи, которые можно считать смысловыми единицами геометрии треугольника и смежных с ним фигур. В рамках данного мероприятия участники имели возможность сравнить выделенные задачи текстом и чертежом к заданию №18.

Текст:

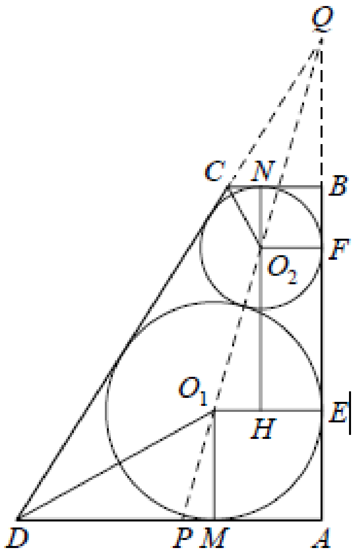
В прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямым углом при вершине A расположены две окружности. Одна из них касается боковых сторон и большего основания AD, вторая — боковых сторон, меньшего основания BC и первой окружности.

а) Прямая, проходящая через центры окружностей, пересекает основание AD в точке P. Докажите, что $\frac{AP}{PD} = \sin D$.

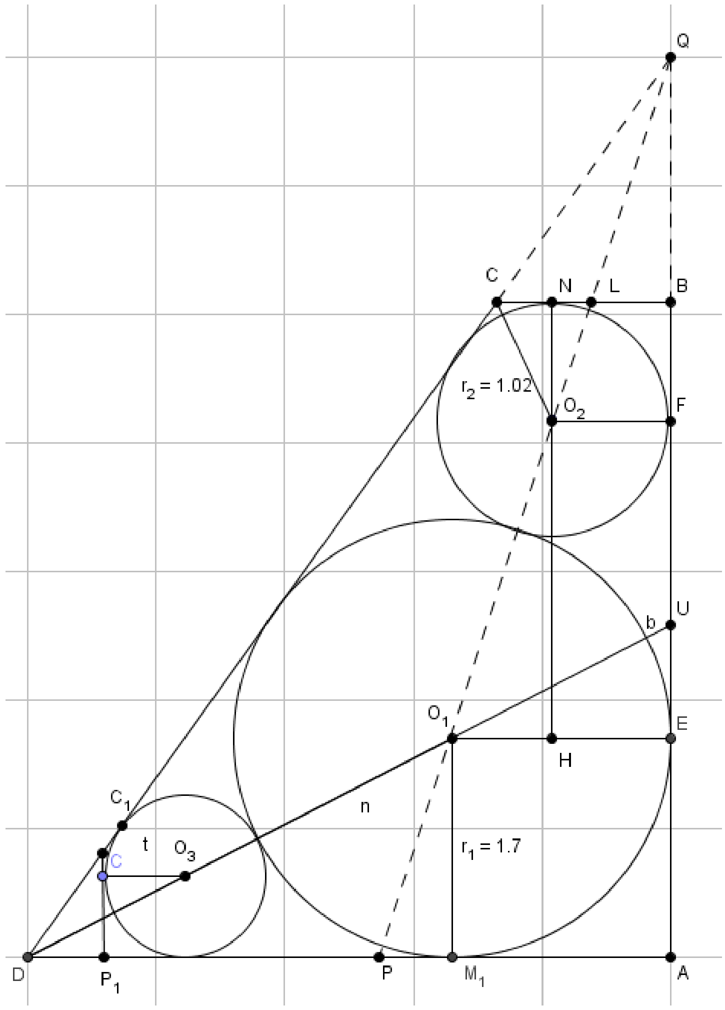
б) Найдите площадь трапеции, если радиусы окружностей равны $\frac{4}{3}$ и $\frac{1}{3}$.

Решение.

а) Пусть Q — точка пересечения продолжений боковых сторон. Точка Q, центры окружностей и точка P лежат на одной прямой, причём QP — биссектриса прямоугольного треугольника AQD. Следовательно, по свойству биссектрисы треугольника $\frac{AP}{PD} = \frac{QA}{QD} = \sin D$.



Чертеж 1.



Чертеж 2

Уточнение с дополнением ΔAQD и [ΔBCQ].

Биссектрисы треугольников

$$\frac{PD}{PD}=\frac{QA}{QD}=\frac{QC}{QB}=\frac{BP_1}{P_1C}=\sin D=cosQ$$

Пусть Q- точка пересечения продолжений боковых сторон (которые становятся двумя внешними касательными к окружностям O_1 и O_2) и прямая, которая является биссектрисой угла AQD и прямоугольных треугольников Δ AQD (и BQC).

Биссектрисы треугольников

$$\frac{AP}{PD}=\frac{QA}{QD}=\frac{BL}{LC}=cosQ$$

По справочной формуле: EF=E1F2=$2\sqrt{r_1\cdot r_2}$.

Это уточнение для угла D необходимо, так как биссектриса угла D d ΔADQ делит противоположную сторону AQ на отрезки AW и WQ пропорциональные смежным сторонам AD и DQ и их отношения в треугольнике ADQ косинуса угла D.

$$\frac{AU}{UQ}=\frac{AD}{QD}=\cos D$$

Поэтому трапецию надо вписать еще сопряженную окружность O_3, касающуюся боковой стороны , нижнего основания и первой окружности. Тогда же линия центров как биссектриса будет также делить отрезки касательных B_1C_1 к окружности O_3 на отрезки пропорциональные смежным сторонам A B_1 и DC_1, отношение B_1V и касательной VC_1

$$\frac{B_1V}{VC_1}=\frac{DK_1}{DC_1}=\cos D$$

Линия центров окружностей O_1 и O_4 являются биссектрисами прямого угла A и делит гипотенузу QD на отрезки DP_2 и P_2Q, которые пропорциональны сторонам AD и AQ. Поэтому

Итак, в трапеции ABCD можно расположить еще две окружности O_3 и O_4, касающиеся первой, нижнего основания и боковых сторон. Линии центров будут биссектрисами трех углов соответствующего прямоугольного треугольника.

Далее логично было бы ожидать в условиях задания значения праметров прямоугольной трапеции: трех длин сторон, острого (или тупого) угла при наклонной стороне и двух длин сторон и т.д. с вопросом найти радиусы взаимновписанных окружностей O_1 и O_2. Но это уже будет сложная, по терминологии математика Лоповка М. «проблемная задача» или «задача в задаче» (Рыжик В.), ведь только при определенных условиях в трапецию можно вписать первые две окружности O_1 и O_2.

Авторы задания выбрали обратную метрическую задачу:

б) Найдите площадь трапеции, если радиусы окружностей равны $\frac{4}{3}$ и $\frac{1}{3}$.

Конечно, выбор обыкновенных дробей с одинаковым числителем означал, что выпускник для экономии времени в вычислениях должен использоваться принцип подобия $k={}^{1}/_{3}$. Вычислив площадь трапеции при $r_1=4$ и $r_2=1$, затем разделив его на 9. Интересно, кто из российских выпускников применил этот принцип?

После вычисляются площади, естественно, надо дать значение периметра трапеции в чертеже.

В заключении обязательным после вычисления площади трапеции является вычисление площади отсеченного треугольника ΔQBC, которое в сумме дает значение площади треугольника ΔQBD. При этом радиус вписанной окружности надо дать цикловую формулу И.Г. Яровский, сопоставив ее аналогично формуле И.С.Зеттеля.

Зеттель, 1934 г.	Яровский, 1956 г.
$r=r_1+r_2+r_3$	$r=\sqrt{\rho_1}\sqrt{\rho_2}+\sqrt{\rho_1}\sqrt{\rho_3}+\sqrt{\rho_2}\sqrt{\rho_3}$

$$r_i=\rho_{ij}$$

Уточнение и дополнение к части б

Парадокс чертежа к задаче заключается в том, что на нем не соблюдены принципы подобия, не говоря уже о пропорциях.

В Δ ADQ и ΔBCQ длина AD=$^{32}/_{3}$ больше BC=$^{8}/_{21}$ ровно в 28 раз.

$tg\alpha = {}^{3}/_{4}$, поэтому α- угол египетского треугольника равен примерно 37° ($36°52'$).

$\widehat{DQC} = 2\alpha = 74°$ больше 45° на 29°, т.е. в 1,5 раза.

Поэтому надо поменять обозначения букв Q и D, центров окружностей O_2 и O_3. С точностью до подобие 28 кратное отношение большего основания к меньшему в трапеции можно только в том случае, если на чертеже вершина острого угла $\widehat{D} = 74°$ будет считаться недоступной.