Новая система гипер комплексных чисел (кварт)

Ставилась задача обобщить обычные комплексные числа на случай четырехмерного пространства, так, чтобы каждой точке четырехмерного пространства взаимно-однозначно соответствовало одно такое обобщенное число. Также было необходимо, чтобы вновь полученные числа обладали свойствами ассоциативности, коммутативности по умножению и сложению. Поэтому система кватернионов, обладающая свойством антикоммутативности, не подходит. С другой стороны, возможность построения такой системы чисел неявно следует из свойств т.н. чисел Клиффорда (2), имеющих размерность 2^n.

Пусть u=a+bi+cj+dk называется квартой. По сложению система кварт, естественно, обладает ассоциативностью и коммутативностью. Рассмотрим умножение кварт.

Пусть i, j — обычные независимые мнимые единицы, ii=jj=-1, k - псевдоскаляр, kk=1, ik=ki=j, jk=kj=i, ij=ji=-k, ijk=-1. Рассмотрим таблицу 1 умножения кварт:

Таблица 1

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	-k	j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	i	1

Заметим, что умножение кварт обладает свойствами ассоциативности и коммутативности, что позволяет применить их в алгебре и, возможно, в анализе. Неотрицательное действительное число r = $\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$ назовем нормой кварты.

Если u=a+bi+cj+dk — алгебраическая форма кварты, то u = r $(\frac{a}{r}+\frac{b}{r}i+\frac{c}{r}j+\frac{d}{r}k)$ $=r(\cos\varphi_1+\cos\varphi_2 i+\cos\varphi_3 j+\cos\varphi_4 k)$ может пониматься как тригонометрическая форма кварты. Запишем обобщенную формулу Эйлера:

$$e^{u}=e^{a}\times(\cos\alpha_1+i\sin\alpha_1)\times(\cos\alpha_2+j\sin\alpha_2)\times(ch\alpha_3+ksh\alpha_3)=$$
$$e^{a}\times[(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 ch\alpha_3-\sin\alpha_1\sin\alpha_2 sh\alpha_3)+i(\sin\alpha_1\cos\alpha_2 ch\alpha_3+\cos\alpha_1\sin\alpha_2 sh\alpha_3)+$$
$$+j(\cos\alpha_1\sin\alpha_2 ch\alpha_3+\sin\alpha_1\cos\alpha_2 sh\alpha_3)+k(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 sh\alpha_3-\sin\alpha_1\sin\alpha_2 ch\alpha_3)]$$

Квадратные уравнения в квартах будут иметь 4 решения, уравнения степени n — 2n решений. Примеры:

$x^{2}=1$; $x_{12}=\pm1$; $x_{34}=\pm k$;

$x^{2}=-1$; $x_{12}=\pm i$; $x_{34}=\pm j$

$x^{2}=i$; $x_{12}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$; $x_{34}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(j+k)$;

Отметим, что разложение в произведение Виета многочлена не будет единственным.

Можно рассмотреть свойства элементарных функций переменной в квартах.

1. Степенная функция.

Пусть $u=x_1+x_2i+x_3j+x_4k$, $w=y_1+y_2i+y_3j+y_4k$ — переменные в квартах, $w=u^{n}$ (n -целое положительное число). Как представляется, степенная функция определена для всех кварт, каждому числу u она ставит в соответствие u^{n}. Множество кварт, норма которых равна 1, изображается сферой единичного радиуса в четырехмерной системе координат.

2. Показательная функция.

Эта функция имеет вид:

$$w=e^{u}=e^{a}\times(\cos\alpha_1+i\sin\alpha_1)\times(\cos\alpha_2+j\sin\alpha_2)\times(ch\alpha_3+ksh\alpha_3)=$$
$$e^{a}\times[(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 ch\alpha_3-\sin\alpha_1\sin\alpha_2 sh\alpha_3)+i(\sin\alpha_1\cos\alpha_2 ch\alpha_3+\cos\alpha_1\sin\alpha_2 sh\alpha_3)+$$
$$+j(\cos\alpha_1\sin\alpha_2 ch\alpha_3+\sin\alpha_1\cos\alpha_2 sh\alpha_3)+k(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 sh\alpha_3-\sin\alpha_1\sin\alpha_2 ch\alpha_3)]$$

$$= e^{a}(\beta_1 + \beta_2 i + \beta_3 j + \beta_4 k.$$

Заметим, что $\beta_1^{2} + \beta_2^{2} + \beta_3^{2} + \beta_4^{2} = ch^2 \alpha_3 + sh^2 \alpha_3$. Пусть $\rho = \sqrt{ch^2 \alpha_3 + sh^2 \alpha_3}$.

$$r = e^{a} \cdot \rho$$

$$\cos\varphi_1 = \frac{\beta_1}{\rho}$$

Тогда $\cos\varphi_2 = \frac{\beta_2}{\rho}$ формулы перехода от показательной формы кварт к

$$\cos\varphi_3 = \frac{\beta_3}{\rho}$$

$$\cos\varphi_4 = \frac{\beta_4}{\rho}$$

тригонометрической.

Для кварт выполняется формула Эйлера, функция же w=e^{n} является периодической. Аналогично можно ввести тригонометрические, гиперболические, обратные тригонометрические и гиперболические функции. Далее можно ввести понятия предела и производной функции в квартах, если не возникнет каких-либо затруднений. В заключении выражаем надежду, что и другие, не такие элементарные свойства кварт будут исследованы и описаны.

Литература

1. Общая алгебра. Т.1 (О.В. Мельников, В.Н. Ремесленников..) — М.,Наука, 1990

2. Г.Казанова. Векторная алгебра. — М., Мир, 1979