Введение

Как следует из названия, базисная функция является частью некоторого базиса в функциональном пространстве. Если базис определен в линейном пространстве, функция также может называться базисным вектором. Набор базисных функций определяет базис пространства, все остальные элементы которого могут быть выражены как линейная комбинация элементов данного базиса. Например, аналитическую функцию от одного переменного можно разложить в ряд Тейлора – бесконечную сумму, где в качестве базисных функций выбраны степенные. Если в качестве базиса взять синусоидальные функции, мы получим преобразование Фурье.

Базисы применяются в кодировании и обработке сигналов, в сжатии информации. В частности, широкое применение нашли вейвлеты – от сжатия изображений до анализа аудио- и видеосигналов.

В данной статье предоставляется обзор существующих алгоритмов кодирования и обработки сигналов с использованием базисов и исследование истории их возникновения в решении компьютерных задач.

Вейвлеты: определение и история возникновения

Слово «вейвлет» произошло в результате копирования произношения английского аналога «wavelet», переводящегося как «небольшая волна» или «волны, идущие друг за другом». Вейвлет представляет собой некоторую функцию, с помощью которой можно анализировать различные частотные компоненты данных. К примеру, при сжатии изображения с помощью вейвлетов оно разбивается на две части – высокочастотный и низкочастотный спектры. С каждым из них можно работать по отдельности, используя разные методы сжатия. Алгоритмы сжатия изображений с потерями, в которых используются вейвлеты, обладают большей степенью сжатия, чем существующие алгоритмы и не уступают им (а во многих случаях превосходят) в плане визуального качества результата.

График вейвлета выглядит как волнообразные колебания, амплитуда которых уменьшается до нуля с увеличением расстояния от начала координат. Вейвлетный базис – семейство функций, каждая из которых ограничена по времени и частоте. Все функции пространства, базисом которого он является, получаются посредством операций сдвига и растяжения базисных вейвлетов.

Основные методы теории вейвлетов базируются на работах классиков математической науки: А.Н. Колмогорова, А. Лебега, А. Хаара, К. Шеннона. Разработка вейвлетов связана с отдельными работами А. Хаара, датированными началом XX в. Долгое время теория вейвлетов не находила применения, но с развитием прикладных областей современной науки – таких, как цифровая обработка сигналов, теории фильтрации и кодирования, теория сплайнов - выяснилось, что в приложении к практическим задачам вейвлеты во многом более удобны, нежели применявшиеся до этого преобразования Фурье.

Вейвлеты применялись на практике еще в 50-е годы при фильтрации сигналов, но расцвет теории вейвлетов приходится на 80 – 90-е годы XX века. Именно в этот период были получены законченные теоретические результаты и разработаны эффективные методы их практического применения. Многие положения теории вейвлетов допускают формулировку и интерпретацию в терминах других наук, поскольку, как пишет С. Малла, «в основу теории вейвлетов положена не какая-либо новая блестящая идея, а концепции, которые уже существовали в разнообразных формах в других областях знаний»[2].

Значительный вклад в теорию вейвлетов внесли Гроссман, Гуппилауд и Морле, в 1982г. сформулировавшие основные идеи непрерывного вейвлет-преобразования. Нельзя не отметить вклад Ингрид Добеши, разработавшей в 1988г. вейвлеты с компактным носителем. Ее монография «десять лекций по вейвлетам»[1] стала классической. Наибольшее внимание к данной теории было уделено в США.

До России информация о теории вейвлетов добралась с опозданием на 8 – 10 лет. В 1999г. появились первые работы по теории вейвлетов на русском языке [6, 7], в 2001г. свет увидели переводы «Десяти лекций по вейвлетам» И. Добеши и «Введения в вейвлеты» Чарльза К. Чуи[3]. Одним из первых русских ученых, заинтересовавшихся данной проблемой, стал С.Б. Стечкин. Он и его ученики стали работать над теорией вейвлетов, позже к ним присоединились математики из Петербурга и Новосибирска.

В настоящее время библиография по теории вейвлетов насчитывает тысячи наименований ученых из самых разных стран мира. Появились инструментальные средства по вейвлетам в системах Matlab, Mathcad и MATEMATICA, что, безусловно, упрощает прикладные расчеты.

Вейвлеты в задачах кодирования информации

В задачах по кодированию вейвлеты применяются в основном для сжатия информации. К примеру, вейвлет-преобразование использует алгоритм JPEG2000. Вейвлет-компрессия используется при кодировании в формат DjVu, известный высокой степенью сжатия черно-белых изображений. Одним из самых известных алгоритмов, применяемых в системах видеонаблюдения, является Motion Wavelet.

При работе с дискретным изображением оно раскладывается на две составляющие – высокочастотные детали (как правило, это резкие перепады яркости) и уменьшенная версия оригинала, причем каждая из этих частей в два раза меньше исходного изображения. После этого каждую часть можно преобразовывать отдельно, применяя методы архивирования или отбрасывая незначительные детали рисунка.

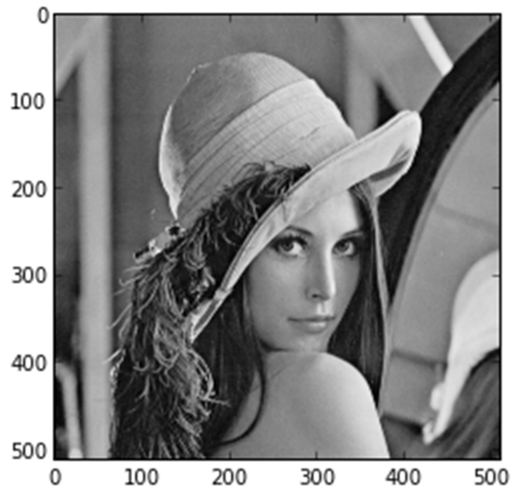

Рис. 1

Простейшим методом сжатия изображения является алгоритм Хаара. Измерим яркость каждого пикселя изображения, после чего образуем две последовательности полусумм и полуразностей значений яркостей соседних пикселов. Для семи первых пикселов примера на рис. 1 получим следующие значения:

154, 155, 156, 157, 157, 157, 158, 156.

После преобразования получим последовательности полусумм и полуразностей: (*154.5, 156.5, 157, 157*) и (*0.5, 0.5, 0, -1*). Как можно заметить, числа во второй последовательности небольшие по модулю. Чем меньше резких переходов яркости на фотографии, тем меньше больших чисел будет во второй последовательности и тем компактнее ее возможно закодировать.

На фотографиях соседние пиксели как правило имеют схожие значения яркости, поэтому значения из второй последовательности в подавляющем большинстве будут небольшими по модулю, и для их кодирования можно будет использовать менее одного байта.

Рассмотрим получившиеся последовательности. Полусуммы представляют собой усредненные значения яркостей соседних пикселов – т.е., уменьшенную копию оригинала. Кроме того, они сглаживают случайные всплески значений яркости. Полуразности же наоборот выделяют всплески, «отфильтровывая» низкие частоты. Таким образом, преобразование Хаара разделяет сигнал на высокочастотную и низкочастотную составляющие. Низкочастотная составляющая несет в себе общую информацию о контурах на изображении, а высокочастотная – о шуме и мелких деталях. В некоторых случаях (к примеру, когда изображение является портретом) мелкие детали не имеют особого значения, поэтому часть высокочастотных данных можно отбросить. Кроме того, преобразование Хаара возможно применять несколько раз, увеличивая долю высокочастотной составляющей, значения которой можно компактно закодировать.

Алгоритм назван в честь венгерского математика Альфреда Хаара, предложившего данный алгоритм в 1909 году. Алгоритм базируется на работах по вейвлетам Хаара, открытых им же. Его идеи развила Ингрид Добеши. Вместо постоянного набора функций, которые формируют вейвлеты Хаара, она предложила использовать функции, вычисляемые итерационным путем. Эти функции были названы вейвлетами Добеши.

Алгоритмы сжатия изображений с помощью вейвлетов часто применяются для хранения рентгеновских снимков. Кроме того, Федеральное бюро расследований США ввело стандарт на вейвлетное сжатие изображений отпечатков пальцев.

Вейвлеты в задачах обработки сигналов

Помимо сжатия информации вейвлеты часто используются для очистки сигнала от шума. Например, с помощью вейвлетов возможно выделение голоса на аудиозаписях разговоров с сильной зашумленностью на заднем фоне. Способ применения вейвлетов и алгоритм «очищения» сигнала в некоторой степени схож с алгоритмом сжатия информации.

Модель сигнала можно описать следующей формулой: $v(t) = S(t) + \sigma N(t)$. Здесь $v(t)$ – полученный сигнал, $S(t)$ – полезный сигнал, $N(t)$ – шум, а σ – уровень шума. Для абсолютного большинства случаев можно предположить, что $N(t)$ – модель белого (гауссовского) шума и информация о нем содержится в высокочастотной области спектра сигнала. Соответственно, полезная информация – в низкочастотной области. Разложив сигнал двумя фильтрами на высокочастотную и низкочастотную составляющую, вторую часть можно либо удалить целиком, либо обнулить значения выше определенного порога. Такой процесс называется пороговой фильтрацией коэффициентов детализации.

Чем меньше коэффициентов в высокочастотной области спектра значительно отличаются от нуля, тем эффективнее работает данная методика.

На рис. 2 представлен пример очищения сигнала с помощью вейвлетов Добеши 7-го порядка, 5 уровней разложения. Красным цветом на графике показан исходный сигнал, синяя кривая – сглаженный сигнал. Хорошо заметно, что кратковременные всплески (к примеру, на аудиозаписи разговора это могут быть шумы на заднем фоне) сглажены, но в целом кривая повторяет график исходного сигнала, не внося никаких значительных изменений.

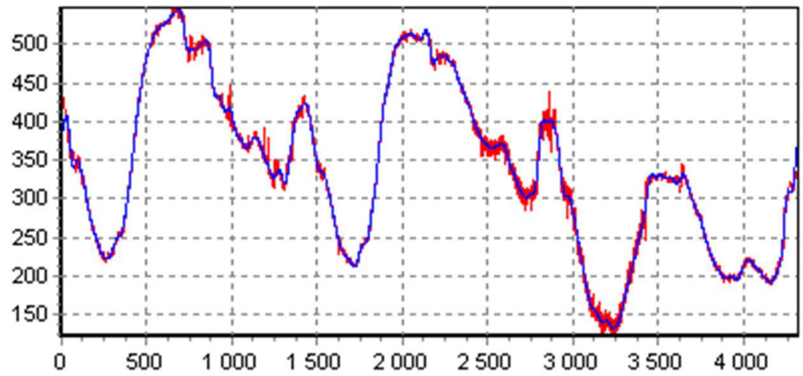

Рис. 2

Стоит отметить, что с увеличением глубины разложения результирующий график становится все более гладким. Другими словами, отфильтровываются не только локальные кратковременные всплески, но и некоторые особенности исходного сигнала. На рис. 3 показано преобразование того же сигнала, что и на рис. 2, но на этот раз глубина разложения увеличена до 7 уровней.

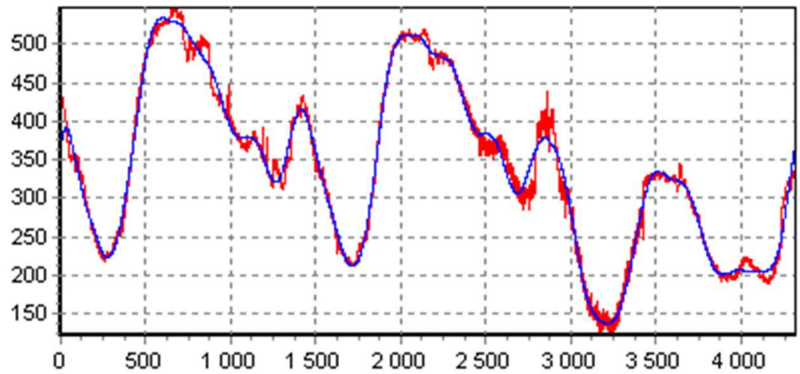

Рис. 3

Помимо сглаживания, вейвлеты используются для выявления характерных особенностей сигнала. На рис. 4 показан график синусоиды, имеющей небольшое локальное искажение (выделено квадратом).

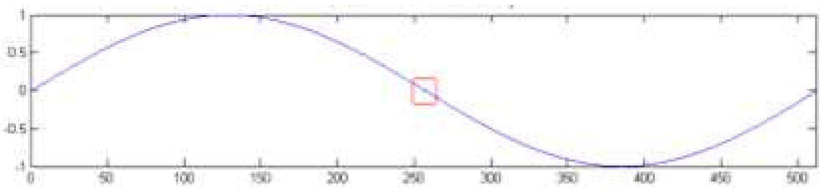

Рис. 4

Если просмотреть спектрограмму сигнала, которое даст оконное преобразование Фурье, в отмеченной точке мы не заметим никаких особенностей (рис.5).

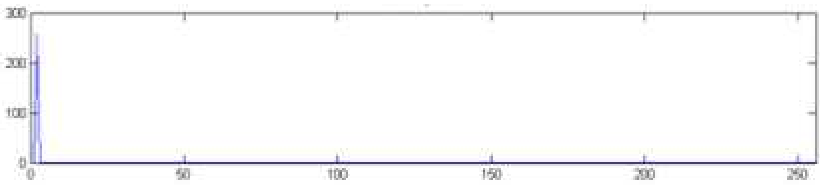

Рис. 5

Однако на графике коэффициентов детализации это различие отлично заметно (рис. 6).

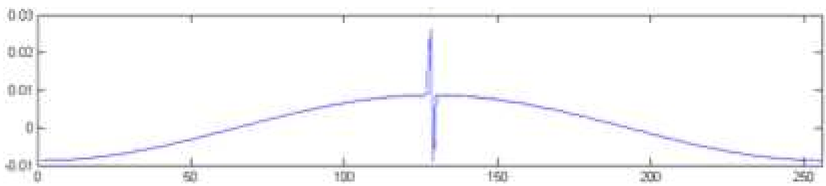

Рис. 6

Первой заметной российской работой на эту тему можно считать учебное пособие Л.В. Новикова[4], в которой изложен математический аппарат теории вейвлетов в приложении к инженерным специальностям. На три года ранее была выпущена статья Н.М. Астафьевой[5], в которой также приводятся примеры практического использования вейвлетов при анализе сигналов.

Список литературы

1. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. – Ижевск: РХД, 2001. – 464с.
2. *Малла С.* Вейвлеты в обработке сигналов – М.: Мир, 2005 – 672с.
3. *Чуи К.* Введение в вейвлеты – М.: Мир, 2001 – 412с.
4. *Новиков Л.В.* Основы вейвлет-анализа сигналов – Спб: МОДУС+, 1999 – 151с.
5. *Астафьева Н.М.* Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // Успехи физических наук. 1996. Т. 166, №11. С. 1145-1170
6. *Воробьев В.И., Грибунов В.Г.* Теория и практика вейвлет-преобразования – ВУС, 1999 – 206с.
7. *Петухов А.П.* Введение в теорию базисов всплесков – СПб: СПбГТУ, 1999 – 132с.